Durée 2h. Calculatrice autorisée

Nom :

Prénom :

Groupe de TD :

Ex.	1	2	3	4	5	6	7	Total
Barème	3	2	3	4	2	3	3	20
Note								

Exercice 1 —

1. Déterminer les limites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x-1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

2. Donner une équation de la droite passant par le point $(1,2)$ et ayant coefficient directeur 3.

Exercice 2 — *Pourcentages*

Une usine fabrique des chaises, dont elle peint $30\,\%$ en bleu et le reste en blanc. Pour l'année prochaine le dirigeant prévoit qu'on fabrique le même nombre de chaises au total mais qu'on baisse de $40\,\%$ le nombre de chaises peintes en bleu ; en fait, la peinture bleue coûte le double de la peinture blanche. De quel pourcentage cette décision fera-t-elle diminuer les coûts de peinture ?

Exercice 3 —

1. La TVA dans la restauration est de $10\,\%$ (sur le prix HT). Lorsque vous payez 16 € pour un déjeuner quel est le montant de la TVA ?

2. Un vendeur de vélos vous propose une réduction de $15\,\%$ et vous laisse choisir d'appliquer cette réduction avant ou après calcul de la TVA, donc sur le prix HT ou sur le prix TTC. Avez-vous une préférence pour l'une des deux options ? Expliquez !

3. Le prix du lait a augmenté de $100\,\%$ en dix ans. Quelle est le pourcentage de l'augmentation annuelle moyenne ?

Exercice 4 —

On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 1 \\ x + 4y + z + 2t = 1 \\ -2x + 6y + 26z - 13t = -17 \\ 3x + 2y - 17z + 14t = 9 \end{cases}$$

1. Transformer le système en un système équivalent qui est triangulaire (ou échelonné). En déduire qu'il possède une infinité de solutions et expliquer pourquoi.

2. Déterminer l'ensemble des solutions et le décrire géométriquement.

Exercice 5 —

On considère le système échelonné suivant, écrit en forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} a & * & * & * & * & * & * & * & r_1 \\ & b & * & * & * & * & * & * & r_2 \\ & & & & & c & * & * & r_3 \\ & & & & & & & & r_4 \end{array}\right)$$

où a, b, c et r_k sont des réels tels que $abc \neq 0$. Comme d'habitude, les étoiles sont des réels non-spécifiés et les emplacements vides sont des zéros.

1. Combien d'équations possède le système ? Et combien d'inconnues ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système ait une solution. En supposant cette condition satisfaite, décrivez comment on résout le système ; de combien de paramètres dépend la solution générale ?

Exercice 6 —

1. Résoudre le système échelonné

$$\begin{cases} -3a + 3b + 2c + d = 0 \\ \quad - 12b + 2c + 7d = 0 \\ \qquad 2c - 3d = 0. \end{cases}$$

2. Une première unité de fabrication fait le produit A, une seconde le produit B, une troisième le produit C et une quatrième le produit D. Elles font un commerce de troc : La première utilise 30 % de B, 20 % de C et 10 % de D ; la seconde utilise 10 % de A, 0 % de C et 20 % de D ; la troisième utilise 10 % de A, 10 % de B et 30 % de D ; et la quatrième utilise 10 % de A, 10 % de B et 20 % de C. On suppose que les produits circulent uniquement entre ces quatre unités de fabrication et qu'il n'y a pas de flux d'argent d'une unité à l'autre.
Quelles sont les valeurs respectives de ces produits ? (Donner la solution formée d'entiers strictement positifs les plus petits possible.)

Exercice 7 —

Le principe de l'impôt sur les revenus est le suivant : le revenu imposable est partagé en tranches ; l'impôt à payer est calculé en prenant un certain pourcentage sur chaque tranche (comme expliqué en TD).

	Revenu x (en euros)	Part d'impôts
tranche 1	$0 \leqslant x < 5\,963$	0%
tranche 2	$5\,963 \leqslant x < 11\,896$	5.5%
tranche 3	$11\,896 \leqslant x < 26\,420$	14%
tranche 4	$26\,420 \leqslant x < 70\,830$	30%
tranche 5	$x \geqslant 70\,830$	41%

1. Un contribuable gagne 15 000 euros. Combien doit-il payer d'impôts ? Quel est son taux d'imposition ?

2. Écrire la formule qui donne l'impôt $f(x)$ lorsque le revenu x est dans la tranche 4.

Corrigé de l'exercice 1 —

1. On a
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x-1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1+x^{-2}+x^{-3})}{x(1-x^{-1})}=\lim_{x\to-\infty}x^2\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-2}+x^{-3}}{1-x^{-1}}=\infty\,,\qquad \lim_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}e^{-y}=0\,.$$

2. $y=3(x-1)+2$.

Corrigé de l'exercice 2 — *Pourcentages*

La nouvelle fabrication comportera $0.6\times30\,\%=18\,\%$ de chaises bleues ; et donc $82\,\%$ de chaises blanches. Notons n le nombre total de chaises et p le prix unitaire de peinture blanche par chaise ; évidemment ces constantes n'ont pas d'importance, elles vont simplifier dans le calcul. Effectivement on a

$$\begin{aligned}\frac{\text{nouveau coût}}{\text{ancien coût}}&=\frac{2p\times0.18n+p\times0.82n}{2p\times0.3n+p\times0.7n}\\&=\frac{2\times18+82}{2\times30+70}\approx0.9077.\end{aligned}$$

Donc les coûts de peinture diminueront d'environ $9.23\,\%$.

Corrigé de l'exercice 3 —

1. $\mathrm{P_{TTC}}=1.1\times\mathrm{P_{HT}}$, donc
$$\mathrm{P_{HT}}=\mathrm{P_{TTC}}/1.1=16/1.1\approx14.55.$$
La TVA est donc de 1.45€.
Autre méthode (qui ne fonctionne pas avec tous les taux) : Comme la TVA fait $1/10$ du prix HT, elle fait $1/11$ du prix TTC, donc $16€/11\approx1.45$€.

2. Aucune préférence, cela revient au même ! Dans les deux cas le prix à payer est $0.85\times1.2\times\mathrm{P_{HT}}$.

3. En dix ans le prix est multiplié par deux. Comme $\sqrt[10]{2}\approx1.072$ cela fait une augmentation annuelle d'environ $7.2\,\%$.

Corrigé de l'exercice 4 —

1. Méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\1&4&1&2&1\\-2&6&26&-13&-17\\3&2&-17&14&9\end{pmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\ \ \times2\ \ \times(-3)\\+\\+\\+\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\&2&4&-2&0\\&10&20&-5&-15\\&-4&-8&2&6\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \mid\times\frac12\\ \mid\times\frac15\\ \mid\times\frac12\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\&1&2&-1&0\\&2&4&-1&-3\\&-2&-4&1&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \times(-2)\\+\\+\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&1\\&1&2&-1&0\\&&&1&-3\\&&&&0\end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 1 \\ \quad\; y + 2z - t = 0 \\ \qquad\qquad\;\; t = -3 \\ \qquad\qquad\;\; 0 = 0. \end{cases}$$

Ce système n'a pas d'équation impossible et on le résout en isolant successivement t, y, x (variables à pivot) pour les exprimer en fonction de z (variable libre). Il y a une infinité de solutions paramétrées par z.

2. Par substitutions successives du bas vers le haut :

$$\begin{cases} x = 1 - 2y + 3z - 4t \\ \quad = 1 - 2(-3 - 2z) + 3z - 4(-3) = 19 + 7z \\ y = t - 2z = -3 - 2z \\ t = -3 \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

L'espace de solutions est la droite passant par le point $(19, -3, 0, -3)$ et dirigée par le vecteur $(7, -2, 1, 0)$.

Corrigé de l'exercice 5 —

1. C'est un système à quatre équations et huit inconnues qu'on pourra noter $x_1, \ldots, x_8$.

2. Le système possède une solution si et seulement si $r_4 = 0$. Dans ce cas, on isole successivement les trois « inconnues à pivot » x_6, x_2 et x_1 et on les exprime en fonction des autres cinq inconnues, à savoir x_3, x_4, x_5, x_7 et x_8. La solution générale dépend de cinq paramètres.

Corrigé de l'exercice 6 —

1. On résout un système linéaire échelonné par substitutions successives (du bas vers le haut) :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}(3b + 2c + d) = \frac{1}{3}(\frac{5}{2}d + 3d + d) = \frac{13}{6}d \\ b = \frac{1}{12}(2c + 7d) = \frac{1}{12}(3d + 7d) = \frac{5}{6}d \\ c = \frac{3}{2}d. \end{cases}$$

L'ensemble de solutions est l'ensemble des quadruplets de la forme $(\frac{13}{6}d, \frac{5}{6}d, \frac{3}{2}d, d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ arbitraire. Cet ensemble est la droite dans $\mathbb{R}^4$ passant par l'origine et dirigée par le vecteur $(13, 5, 9, 6)$.

2. Notons a, b, c et d les valeurs recherchées. La première unité achète pour une valeur de $0.3b + 0.2c + 0.1d$; il vend pour une valeur de $0.1a + 0.1a + 0.1a = 0.3a$. Puisqu'il s'agit d'un troc on a $0.3b + 0.2c + 0.1d = 0.3a$. De même on obtient un égalité pour chacun des deux autres pays :

$$\begin{cases} -0.3a + 0.3b + 0.2c + 0.1d = 0 \\ \quad 0.1a - 0.5b + \qquad + 0.2d = 0 \\ \quad 0.1a + 0.1b - 0.4c + 0.3d = 0 \\ \quad 0.1a + 0.1b + 0.2c - 0.6d = 0. \end{cases}$$

Méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \times 3 \\ \mid \times 3 \\ \mid \times 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ & -12 & 2 & 7 \\ & 6 & -10 & 10 \\ & 6 & 8 & -17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \times 2 \\ \mid \times 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ & -12 & 2 & 7 \\ & & -18 & 27 \\ & & 18 & -27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \text{(équation superflue)} \end{array}$$

Ainsi on tombe sur le système de la question précédente. La plus petite solution à valeurs entières est $(13, 5, 9, 6)$.

Corrigé de l'exercice 7 —

1. Calculons l'impôt sur 15 000€. Les premiers 5 963€ sont non-imposables, ensuite il faut imposer à 5.5% la valeur comprise dans la tranche 2 :

$$0.055\,(\,11\,896 - 5\,963\,) \approx 326;$$

et aussi la valeur comprise dans la tranche 3 :

$$0.14\,(\,15\,000 - 11\,896\,) \approx 435\,.$$

L'impôt est donc 761€ et le taux d'imposition de ce contribuable s'élève à

$$\frac{761}{15\,000} \approx 5.07\,\%\,.$$

2. On a

$$0.055\,(\,11\,896 - 5\,963\,) \approx 326,$$
$$0.14\,(\,26\,420 - 11\,896\,) \approx 2\,033.$$

Donc pour $26\,420 \leqslant x < 70\,830$

$$f(x) = 0.3(x - 26420) + 2359.$$