Exercice 16.

1. Pendant les soldes un magasin donne une remise de 30%. Le prix non-soldé d'une veste est de 70 €; quel est son prix soldé ? Le prix soldé d'une chemise est de 21 €; quel est son prix non-soldé ?

2. 64% des élèves d'un lycée sont des garçons ; 25% des garçons et 40% des filles apprennent l'allemand. Y a-t-il plus de garçons que de filles qui font de l'allemand ?

3. Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

4. Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

5. Un prix subit les variations successives suivantes : $+25\,\%, +50\,\%, -20\,\%$. Par quelle quatrième variation peut-on le ramener au prix initial ?

6. En six ans une quantité a diminué de 60 %. Quel est le pourcentage de la diminution annuelle moyenne ?

7. En l'année 2000, le prix au m^2 des appartements parisiens était de 2760€. Dix ans plus tard il est à 7060€. A combien s'élève le pourcentage de la variation annuelle moyenne ?

8. La TVA est 20% sur le prix HT (hors taxes). Quel est le montant de la TVA sur un ordinateur acheté à 180 € ?

9. Les taxes sur l'essence représentent 55% du prix TTC (toutes taxes comprises). Calculer le pourcentage de ces taxes par rapport au prix HT (hors taxe, c'est-à-dire le prix initial avant d'y ajouter les taxes).

Exercice 17.

Une usine fabrique des bancs rouges et des bancs noirs. Elle fabrique 40% de bancs, peints en rouge et le reste en noir. La peinture rouge est deux fois plus chère que la peinture noire. Pour l'année prochaine, le dirigeant souhaite diminuer le coût de peinture de 10% tout en fabriquant le même nombre de bancs. Quel devra être alors le pourcentage de bancs peints en rouge ?

Exercice 18.

Déterminer la fonction affine f dont le graphe

1. passe par les points $(0, 0)$ et $(5, 2)$.

2. a pour coefficient directeur $\frac{2}{5}$ et passe par $(3, 2)$.

3. passe par les points $(-1, 3)$ et $(3, -5)$.

Exercice 19.

Un propriétaire met sa maison en vente chez un agent immobilier. Il souhaite la vendre pour 460 k€. L'agent pense pouvoir la vendre à 500 k€. Ils conviennent donc que le prix affiché sera 500 k€ et que l'agent touchera une prime supplémentaire s'il arrive à vendre, après négociations, à plus de 460 k€; dans le cas où le prix de vente atteint 500 k€ la prime sera 10 k€. Il reste à fixer la méthode de calcul de la prime lorsque la maison est vendue entre 460 et 500 k€. Voici deux méthodes différentes, souvent utilisées dans la pratique :

1. Interpolation linéaire du montant de la prime.

2. La prime est un pourcentage du prix de vente ; on fait une interpolation linéaire de ce pourcentage.

Notant x le prix de vente et $f(x)$ le montant de la prime, trouver pour chacun de ces deux cas la formule de $f(x)$, puis tracer la courbe de f.

Exercice 20.

Le principe de l'impôt sur les revenus est le suivant : le revenu imposable est partagé en tranches ; l'impôt à payer est calculé en prenant un certain pourcentage sur chaque tranche.

	Revenus R en euros	Part d'impôts
tranche 1	$R \leqslant 10\,000$	0%
tranche 2	$10\,000 < R \leqslant 30\,000$	15%
tranche 3	$30\,000 < R \leqslant 80\,000$	30%
tranche 4	$80\,000 < R \leqslant 150\,000$	40%
tranche 5	$150\,000 < R$	50%

1. Une certaine personne a un revenu annuel de 55 000 €. Combien paye-t-elle d'impôts ? Quel est pourcentage d'imposition sur son revenu ? On lui propose un travail supplémentaire, rémunéré 5 000 €; combien en restera après impôts ?

2. Déterminer en fonction du revenu R l'impôt $f(R)$ à payer puis représenter graphiquement cette fonction sur $[0, 170\,000]$.

3. Quel revenu faut-il avoir pour payer 20 000 € d'impôts ?

Exercice 21.

1. Simplifier les expressions $\ell n(e\sqrt{e})$ et $\ell n(\frac{1}{e^2})$.

2. Résoudre $20000 = 1000 \times 1.15^x$.

3. Sachant qu'on a $\ell n(2) \approx 0.7$ et $\ell n(3) \approx 1.1$, calculer sans calculatrice les expressions suivantes : $\ell n(6)$, $\ell n(\frac{3}{2})$, $\ell n(8)$, $\ell n(9)$, $\ell n(24)$, $\ell n(\sqrt{3})$, $\ell n(\frac{27}{4})$.

Exercice 22.

1. Tracer sur un même dessin et dans un repère orthonormé les quatre fonctions puissances définies pour tout $x > 0$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $h(x) = x^{-1}$ et $k(x) = x^{-2}$.

2. Même question avec les trois fonctions exponentielles définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^x$, $u(x) = 2^x$ et $v(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Exercice 23.

Résoudre les (in)équations suivantes.

$$\ell n(3x+2) = 2, \qquad \ell n(3x+5) = \ell n(2x+1),$$
$$\ell n(4x-3) \leqslant \ell n(2x-1), \qquad e^{3x+2} = 2,$$
$$e^{2x-1} \leqslant 2, \qquad e^{3x^2+5x+2} = 1,$$
$$e^{3x^2+5x+2} = -2, \qquad e^{2x} - 2e^x - 3 = 0.$$

Exercice 24.

Questions sur la notion de fonction composée.

1. On considère les trois fonctions définies par $f(x) = \ell n(x-1)$, $g(x) = \sqrt{x}+1$ et $h(x) = e^{2x}$. Donner les expressions simplifiées des fonctions composées ci-dessous, puis dériver chacune.

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ h, \quad h \circ f, \quad g \circ h, \quad g \circ g, \quad h \circ h.$$

2. Soient a et b des réels strictement positifs. On définit les fonctions $\varphi : x \mapsto x^2+1$, $t : x \mapsto x+b$ et $s : x \mapsto ax$. Représenter sur un même dessin les graphes des fonctions φ, $\varphi \circ t$, $t \circ \varphi$, $\varphi \circ s$, $s \circ \varphi$.

Exercice 25.

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right) \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(-1+\frac{x^2}{3}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^4-5x\right) \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(x^2+5x\right)$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-3x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^4+5x^2}{1+8x-3x^5}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x}$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x}{x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-3x} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x - 1 \qquad \lim_{x\to 0} e^{1/x^2}$$
$$\lim_{x\to\infty} \ell n(3x-1) \qquad \lim_{x\to\infty} \ell n\left(\frac{2}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell n(x)}{x}$$

Exercice 26.

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition.

$$f : x \mapsto \frac{1-2x-x^2}{2x-1} \qquad g : x \mapsto \sqrt{x^2+2x} - x$$

Exercice 27.

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+6}{3x^3-8x+1}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+5x-1}{3x^3+8x^2+1}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+5x^2}{1+8x-3x^5}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x^2}{1+8x-3x^5}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4+5x^2+3}{8x-3x^5}\qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell n(x^5)}{\sqrt{x}}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{\ell n(\sqrt[3]{x})}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{2^x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{x}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty}(\ell n(x^2)-x)\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^3}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{0.5^x}$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\ell n(x^2)-x)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+3x)}{x}$$

Exercice 28.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x-2 \qquad g : x\mapsto \frac{4}{x}+x$$
$$h : x\mapsto \frac{2x-1}{x+2} \qquad j : x\mapsto 5(x-2)(x^2-1)$$
$$k : x\mapsto (3x^2+1)^9 \qquad \ell : x\mapsto \frac{x^3+3x^2-1}{7}$$
$$m : x\mapsto \frac{3}{x^2+4} \qquad n : x\mapsto 6x^{\frac{1}{2}}$$
$$p : x\mapsto 4\sqrt{x}-3x^2 \qquad u : x\mapsto \sqrt[3]{x^2+2}$$

Exercice 29.

Tous les résultas de cet exercice sont à arrondir au centîme le plus proche.

On a un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés

1.a. annuellement,

1.b. mensuellement,

1.c. quotidiennement,

1.d. en continu.

2. On suppose que les intérêts sont versés en continu.

2.a. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?

2.b. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Exercice 30.

Dériver :

$$d : x\mapsto \frac{1}{3^x} \qquad e : x\mapsto 5^{2x^3-x+1}$$
$$f : x\mapsto \frac{(2x^3-x+1)^3}{3} \qquad g : x\mapsto e^{x^2}$$
$$h : x\mapsto \frac{1}{3x-2} \qquad j : x\mapsto \frac{1}{(2-3x)^3}$$
$$k : x\mapsto \sqrt{\ell n(2x^2+1)} \qquad \ell : x\mapsto \exp\left(\sqrt[3]{1-x}\right)$$
$$m : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} \qquad n : x\mapsto 3^x x$$

Exercice 31.

Sans calculatrice et en utilisant la dérivée, donner des valeurs approchées de

$$\sqrt{99}\ ;\qquad e^{0.01}\ ;\qquad 5.04^4\ ;\qquad \frac{1}{51^2}\ .$$

Dans chaque cas spécifier si votre approximation est plus grande ou plus petite que la valeur exacte.

Exercice 32.

Soient les fonctions

$$f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto e^{-x^2},\qquad g:\ \mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\frac{1}{x^3}.$$

1. Donner la dérivée de chacune de ces fonctions.

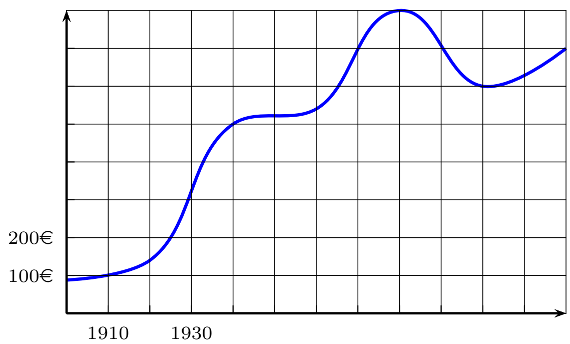
2. Écrire (sous forme la plus courte possible) l'expression de la fonction composée $g\circ f$. Calculer sa dérivée.

3. Déterminer les limites

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)},\qquad \lim_{x\to 0} f(g(x)).$$

Exercice 33.

Ci-dessous est la courbe de l'évolution du prix p d'un certain produit depuis l'année 1900.



Déterminer (approximativement) les abscissses des points stationnaires et des points d'inflexion. Etudiez le signe de p' et de p''. Dans quels intervalles le prix subit-il une hausse accélerée, hausse ralentie, baisse accélerée, baisse ralentie ?

Exercice 34.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{60}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 250)$.

1. Déterminer les abscisses des points stationnaires de f, puis le signe de la dérivée seconde f'' en ces points. Qu'en déduisez-vous ?

2. Déterminer les abscisses des points d'inflexion de f. Déterminer les intervalles dans lequels f est convexe, puis ceux où elle est concave. Tracer la courbe de f.

Exercice 35.

Une entreprise vend tout ce qu'elle produit. On note f la fonction de demande inverse : $f(x)$ désigne le prix unitaire de la marchandise en fonction de la quantité x de marchandises demandées :

$$f(x) = \frac{x^2}{700} - 2x + 1\,000\,.$$

Le coût de production en fonction de la quantité x de marchandises produites est donné par la fonction :

$$C(x) = 10\,000 + 10x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4\,000}\,.$$

1. Calculez la recette pour les quantités de marchandises 200, 600 et 1 000. La recette semble-t-elle augmenter lorsque la quantité de marchandises vendues augmente ?

2. Quels sont les coûts fixes de l'unité de production, c'est-à-dire les coûts lorsque l'entreprise ne produit rien ?

3. On note $B(x)$ le bénéfice réalisé lorsque l'on vend la quantité x. Donner l'expression de $B(x)$.
Etudiez les variations de la fonction $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,,\infty[$, puis esquissez la courbe représentative de B sur l'intervalle $[0\,,\ 800]$. En particulier vous calculerez B en 0, en 800, aux extréma ainsi qu'au(x) point(s) d'inflexion.

4. Calculez le coût marginal C_m en fonction de x. Pour quelle valeur de x le coût marginal est-il maximal ?

5. Etudiez le signe de $C_m(x)$ en fonction de x sur $[0\,,\ 1\,000]$. Interprétez.

Exercice 36.

Pour un certain produit, le nombre d'exemplaires vendus dépend du prix p (en euros) par la fonction $f(p) = 20000\sqrt{100-p}$.

1. Calculer l'élasticité de f en fonction de p.

2. Si le prix du produit est initialement fixé à 50€ quel est le pourcentage de variation des ventes lorsque le prix augmente de 2 % ?

Exercice 37.

On désigne par $f(t)$ la quantité de marchandises qu'une entreprise peut obtenir avec une quantité t de travail. On note s le salaire obtenu après une unité de travail effectué et p le prix d'une unité de marchandise. f est définie par $f(t) = 3t^{\frac{1}{3}}$.

1. Calculer le coût $C(t)$ de t unités de travail, la recette $R(t)$ de l'entreprise et le bénéfice $B(t)$.

2. Montrer que B est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer la quantité de travail qui maximise le bénéfice.

Exercice 38.

Le coût f de fabrication d'un certain produit est représenté sa courbe et par certaines valeurs données dans un tableau.

Point	A	B	C	D	E	F
Quantité	100	200	300	450	508	550
Coût en €	11.00	12.80	15.60	30.00	40.00	50.00

On suppose que la fonction f est dérivable sur $[0, 550]$.

1. À partir des données du tableau, déterminer une approximation de l'équation de la tangente en A et en déduire une approximation des coûts fixes (c'est-à-dire les coûts lorsqu'on ne fabrique rien).

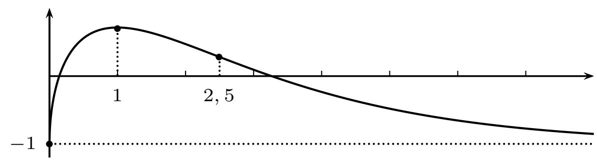
2. Déterminer une approximation de l'équation de la tangente en B.

3. Quel est le coût marginal lorsqu'on fabrique 200 unités (c'est-à-dire le coût additionnel quand on passe de 200 à 201 unités) ? Combien est-ce que ça coûte de fabriquer 210 unités ?

4. Déterminer le coût pour 507 unités.

Exercice 39.

Ci-dessous la courbe d'une fonction f. L'axe des ordonnées est une tangente verticale ; en plus, on a indiqué un point stationnaire, un point d'inflexion et une asymptote.



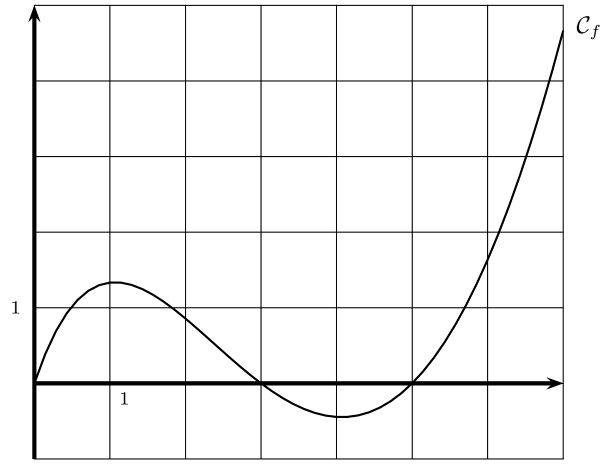
1. Tracer l'allure de f' et celle de f''.

2. Tracer l'allure des fonctions définies par

$$g(x) = f(x) + 1\,, \qquad h(x) = f(x+1)\,,$$
$$u(x) = 2f(x)\,, \qquad v(x) = f(2x)\,.$$

Exercice 40.

Une fonction $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ est donnée par sa courbe ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes sans justifier. Une seule réponse est vraie.

1. ☐ $f'(3) > f'(7/2)$ ☐ $f'(3) = 0$ ☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

2. ☐ $f''(5) > 0$ ☐ $f''(5) = 0$ ☐ $f''(5) < 0$

3. ☐ f est convexe sur $[1, 4]$ ☐ f est convexe sur $[3, 7]$ ☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

Désormais on suppose que la fonction f est donnée par l'expression $f(x) = \dfrac{x(x-3)(x-5)}{x+5}$.

4. ☐ $f'(0) = 3$ ☐ $f'(0) = 3.3$ ☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

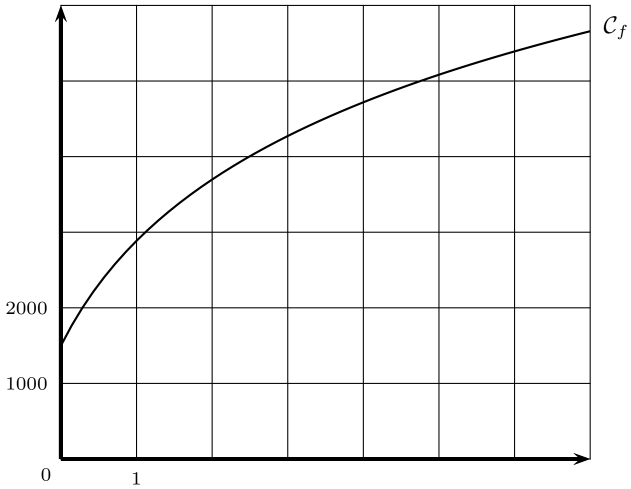
5. Si on pousse la courbe $\mathcal{C}_f$ trois unités vers la gauche on obtient la courbe $\mathcal{C}_h$ d'une fonction h. Alors

☐ $h(x) = \dfrac{x(x-3)(x-5)}{x+5} - 3$ ☐ $h(x) = \dfrac{x(x+3)(x-2)}{x+8}$ ☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

Exercice 41.

Une seule case est bonne. La cocher sans justifier.

Une fonction $f : [0,7] \to \mathbb{R}$ est donnée par sa courbe ci-dessous.



1. ☐ $f'(3) < f'(2)$ ☐ $f'(3) = 0$ ☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

2. ☐ $f'(3) > 100$ ☐ $f'(3) < 100$ ☐ On ne peut pas lire ces informations sur le graphique.

3. ☐ $f''(1) > 0$ ☐ $f''(1) = 0$ ☐ $f''(1) < 0$

Dans la suite de l'exercice on suppose que f est donnée par l'expression $f(x) = 1000\,\ell\text{n}(x^2 + 2x + 1) + 1500$.

4. ☐ $f'(1) = 1000$ ☐ $f'(1) = 250$ ☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

5. On suppose que f décrit l'évolution du revenu de Mr F en fonction de ses années passées dans l'entreprise. Son collègue Mr G est entré dans l'entreprise au même moment que Mr F et a commencé avec le même revenu, mais sa carrière évolue deux fois plus vite que celle de Mr G. Alors l'évolution du revenu de Mr G est donnée par la fonction g où

☐ $g(x) = 2000\,\ell\text{n}(x^2 + 2x + 1) + 3000$
☐ $g(x) = 1000\,\ell\text{n}(4x^2 + 4x + 1) + 1500$
☐ Les deux affirmations précédentes sont fausses.

1. Solutions

Solution 16.

On rappelle que $\% = 1/100 = 0.01$.

1. On paye 70% du prix non-soldé :

$$\text{prix soldé} = 0.7 \times \text{prix non-soldé}.$$

Veste : prix soldé = 0.7×70 € = 49 €
Chemise : prix non-soldé = 21 € / 0.7 = 30 €

2. Dans le lycée, le pourcentage des garçons qui font de l'allemand est 16% car

$$25\% \times 64\% = 0.25 \times 0.64 = \frac{1}{4} \times 0.64 = 0.16.$$

Dans le lycée, le pourcentage des filles qui font de l'allemand est 14.4% car

$$36\% \times 40\% = 0.36 \times 0.4 = 0.144.$$

Donc le nombre de garçons qui apprennent l'allemand est légèrement plus élevé.

3. Augmenter le prix de 25% revient à le multiplier par 1.25 ou encore par $5/4$. Donc pour revenir au prix initial on le multiplie par $4/5$ ou encore par 0.8 ; autrement dit, on fait une baisse de 20%.

4. Notons p_0 le prix de départ, p_1 le prix après la première augmentation et p_2 le prix final. On a

$$p_1 = 1.2\, p_0 \qquad \text{et} \qquad p_2 = 1.5\, p_1$$

donc $p_2 = 1.5 \times 1.2\, p_0 = 1.8\, p_0$. Par conséquence l'augmentation globale est de 80%. L'ordre des augmentations successives n'a pas d'importance car le coefficient multiplicateur global est toujours 1.5×1.2 (la multiplication étant une opération commutative).

5. Le coefficient multiplicateur des trois variations est $1.25 \times 1.5 \times 0.8 = 1.5$. Il faut donc multiplier par $\frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$ pour ramener le prix au prix initial, c'est-à-dire il faut le baisser de $1/3$ (environ 33.33 %).

6. $\sqrt[6]{0.4} \approx 0.86$. Donc la diminution annuelle moyenne est d'environ 14 %.

7. $\sqrt[10]{7060/2760} \approx 1.098$, donc la variation annuelle moyenne est d'environ 9.8 %.

8. On a

$$P_{\mathrm{TTC}} = 1.2\, P_{\mathrm{HT}},$$

donc

$$P_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{1.2}\, P_{\mathrm{TTC}},$$

et finalement

$$\mathrm{TVA} = 0.2\, P_{\mathrm{HT}} = \frac{0.2}{1.2}\, P_{\mathrm{TTC}}.$$

Pour un prix TTC de 180 € on obtient une TVA de 30 € (et un prix HT de 150 €).

9. Si les taxes sont 55% du prix TTC, alors le reste est le prix HT, c'est-à-dire le prix HT est 45% du prix TTC. Donc le pourcentage des taxes par rapport au prix HT est

$$\frac{\text{Taxes}}{P_{\mathrm{HT}}} = \frac{0.55\, P_{\mathrm{TTC}}}{0.45\, P_{\mathrm{TTC}}} = \frac{55}{45} = \frac{11}{9} \approx 1.22 = 122\,\%\,.$$

Solution 17.

Notons n le nombre total de bancs et p le prix de la peinture noire. Pour la première année le coût de peinture est

$$C = 0.6n \times p + 0.4n \times 2p = 1.4np\,.$$

Pour la deuxième année notons α le pourcentage recherché de bancs rouges ; le coût de peinture est alors

$$C' = (1-\alpha)n \times p + \alpha n \times 2p = (1+\alpha)np\,.$$

Le dirigeant souhaite diminuer le coût de peinture de 10%. Autrement dit, il faut que $C'/C = 0.9$, c'est-à-dire

$$\frac{1+\alpha}{1.4} = 0.9.$$

En conséquence $\alpha = 26\,\%$.

Solution 18.

Rappel : La droite de coefficient directeur a et passant par le point (x_0, y_0) a pour équation

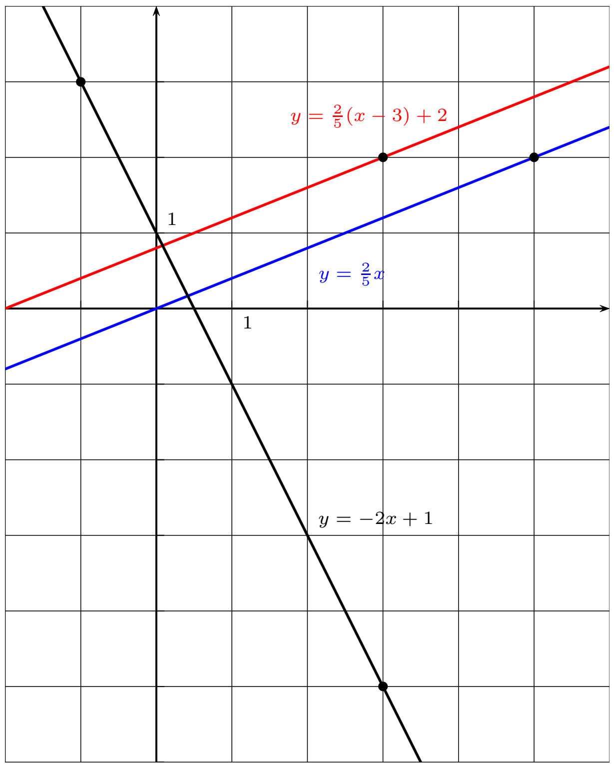
$$y = a(x - x_0) + y_0.$$

En fait, il est évident sur cette équation que le coefficient directeur est a et que les coordonnées du point (x_0, y_0) vérifient cette équation.

1. $f(x) = \frac{2}{5}x$.

2. $f(x) = \frac{2}{5}(x-3) + 2$.

3. On calcule le coefficient directeur : $\frac{3-(-5)}{-1-3} = -2$. Ensuite on trouve $f(x) = -2(x+1) + 3$.
Si on utilise le point $(3, -5)$ on obtient $f(x) = -2(x-3) - 5$, donc la même fonction comme on peut le vérifier en développant.



Solution 19.

On suppose que x et $f(x)$ sont en k€. Clairement $f(x) = 0$ si $x \leqslant 460$.

1. Sur l'intervalle $[460, 500]$ la fonction f est affine telle que $f(460) = 0$ et $f(500) = 10$. D'où

$$f(x) = 0.25(x - 460) \quad \text{si } x \in [460, 500].$$

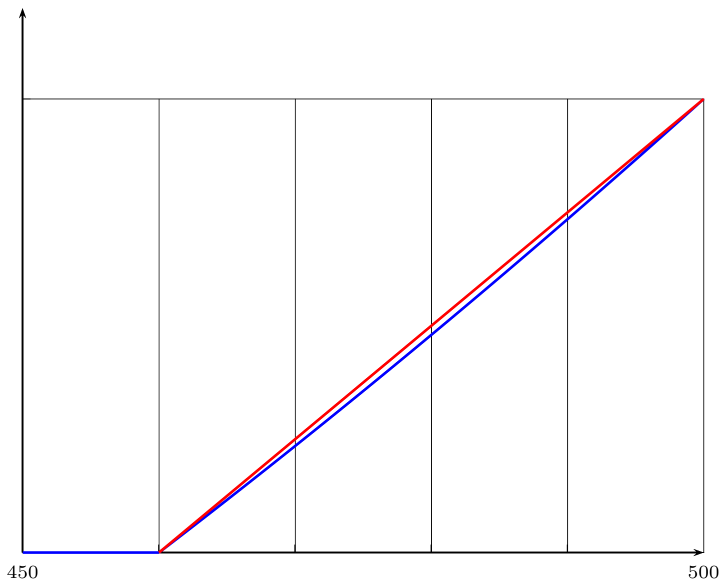
2. Notons $g(x)$ le pourcentage de la prime sur le prix de vente. On a $g(x) = 0$ si $x \leqslant 460$. Sur l'intervalle $[460, 500]$ la fonction g est affine telle que $g(460) = 0$ et $g(500) = 0.02 = 2\,\%$ (car 10 k€ sont 2 % de 500 k€). D'où

$$g(x) = 0.0005(x - 460) \quad \text{si } x \in [460, 500].$$

Finalement le montant de la prime est une fonction de second degré :

$$f(x) = xg(x) = 0.0005x(x - 460) \quad \text{si } x \in [460, 500].$$

Sa courbe est une partie d'une parabole (représentée en bleu) située en dessous du segment de droite obtenu à la première question (représentée en rouge).



Solution 20.

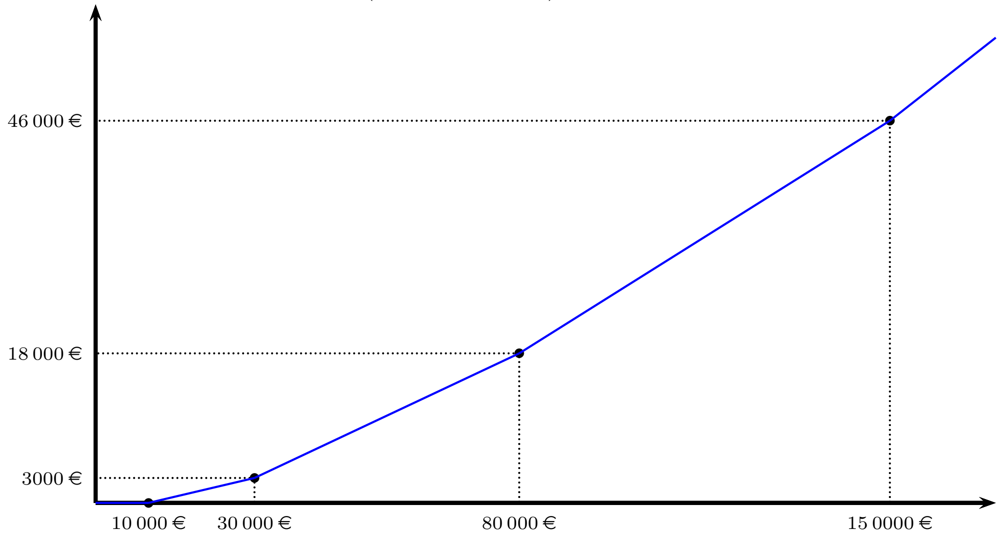
1. La personne gagne 55 000 (toujours en euros). Les premiers 10 000 sont non-imposables ; ensuite il faut imposer à 15% la tranche entre 10 000 et 30 000, donc $0.15 \times 20\,000 = 3\,000$; et finalement il faut imposer à 30% ce qui dépasse 30 000, donc $0.3 \times 25\,000 = 7\,500$. L'impôt total est donc 10 500.
Comme $10\,500/50\,000 = 0.21$ cet impôt représente 21% du revenu.
Puisque le taux marginal est 30% la rémunération du travail supplémentaire est de $0.7 \times 5\,000 = 3\,500$ après impôts.

2. On trouve une fonction continue, croissante, affine par morceaux et convexe :

$$f(R)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leqslant R\leqslant 10\,000,\\ 0.15(R-10\,000) & \text{si } 10\,000< R\leqslant 30\,000,\\ 0.3(R-30\,000)+3\,000 & \text{si } 30\,000< R\leqslant 80\,000,\\ 0.4(R-80\,000)+18\,000 & \text{si } 80\,000< R\leqslant 150\,000,\\ 0.5(R-150\,000)+46\,000 & \text{si } R>150\,000.\end{cases}$$

On a utilisé les calculs suivants :

$$\begin{aligned}&0.15(30\,000-10\,000)=3000,\\&0.3(80\,000-30\,000)+3000=18\,000,\\&0.4(150\,000-80\,000)+18\,000=46\,000.\end{aligned}$$



3. Si on paye 20 000 € d'impôts on est dans la tranche 4. Il faut donc résoudre $0.4(R-80\,000)+18\,000=20\,000$. On trouve $R=85\,000$.

Solution 21.

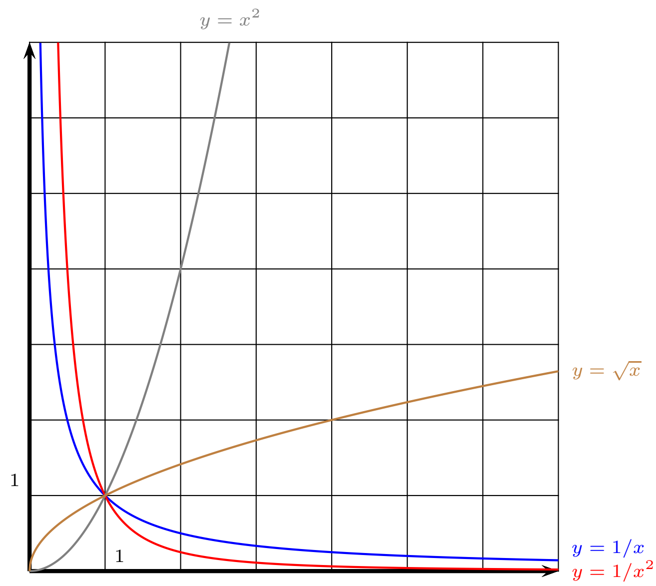
1. $\ell n\left(e\sqrt{e}\right)=\ell n\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}$, $\ell n\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ell n\left(e^{-2}\right)=-2$.

2. $20000=1000\times1.15^x \iff 20=1.15^x \iff \ell n(20)=x\,\ell n(1.15) \iff x=\ell n(20)/\ell n(1.15)\approx 21.4$.

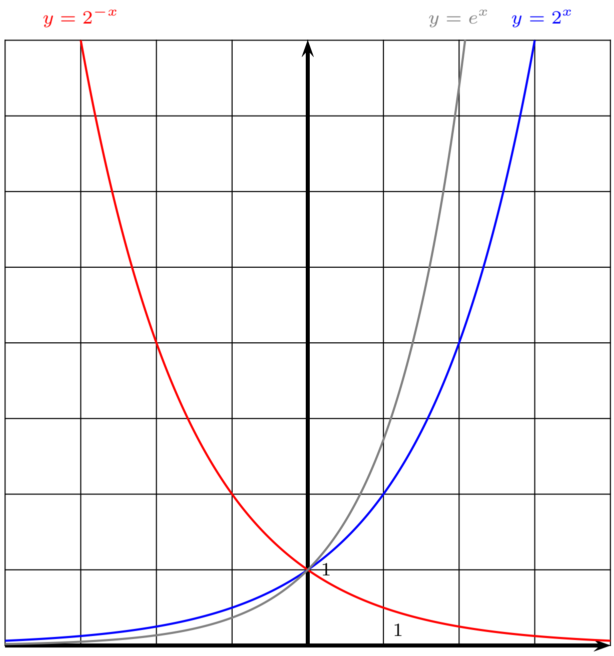
3. On décompose en puissances de 2 et 3 et on fait appel aux règles de calcul du logarithme.
$\ell n(6)=\ell n(2\times3)=\ell n(2)+\ell n(3)\approx 0.7+1.1=1.8$
$\ell n\left(\frac{3}{2}\right)=\ell n(3)-\ell n(2)\approx 1.1-0.7=0.4$
$\ell n(8)=\ell n\left(2^3\right)=3\,\ell n(2)\approx 2.1$
$\ell n(9)=\ell n\left(3^2\right)=2\,\ell n(3)\approx 2.2$
$\ell n(24)=\ell n\left(3\times 2^3\right)=\ell n(3)+3\,\ell n(2)\approx 1.1+2.1=3.2$
$\ell n(\sqrt{3})=\ell n\left(3^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\,\ell n(3)\approx 0.55$
$\ell n\left(\frac{27}{4}\right)=\ell n\left(3^3\times 2^{-2}\right)=3\,\ell n(3)-2\,\ell n(2)\approx 1.9.$

Solution 22.

1.



2.



Solution 23.

► On fait intervenir la condition que $\ell n(t)$ existe seulement si $t > 0$.

$$\begin{aligned} &\ell n(3x+2) = 2 \quad \text{et} \quad 3x+2 > 0 \\ \iff & 3x+2 = e^2 \quad \text{et} \quad 3x > -2 \\ \iff & x = \frac{e^2-2}{3} \quad \text{et} \quad x > -\frac{2}{3} \\ \iff & x = \frac{e^2-2}{3} \approx 1.8. \end{aligned}$$

► De même on trouve

$$\begin{aligned} &\ell n(3x+5) = \ell n(2x+1) \text{ et } 3x+5 > 0 \text{ et } 2x+1 > 0 \\ \iff & 3x+5 = 2x+1 \quad \text{et} \quad x > -\frac{5}{3} \text{ et } \quad x > -\frac{1}{2} \\ \iff & x = -4 \quad \text{et} \quad x > -\frac{1}{2} \qquad \text{Impossible!} \end{aligned}$$

► Et

$$\begin{aligned} &\ell n(4x-3) \leqslant \ell n(2x-1) \text{ et } 4x-3 > 0 \text{ et } 2x-1 > 0 \\ \iff & 4x-3 \leqslant 2x-1 \quad \text{et} \quad x > \frac{3}{4} \text{ et } \quad x > \frac{1}{2} \\ \iff & x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x > \frac{3}{4} \\ \iff & x \in \left]\frac{3}{4}, 1\right]. \end{aligned}$$

► Pour la fonction exponentielle il n'y a pas de restriction sur le domaine de définition.

$$e^{3x+2} = 2 \iff 3x+2 = \ell n(2) \iff x = \frac{\ell n(2)-2}{3}.$$

► Et

$$e^{2x-1} \leqslant 2 \iff 2x-1 \leqslant \ell n(2) \iff x \leqslant \frac{\ell n(2)+1}{2}.$$

► L'équation suivante aboutit à une équation de second degré ; on utilise la méthode habituelle du discriminant :

$$\begin{aligned} & e^{3x^2+5x+2} = e^0 \\ \iff & 3x^2+5x+2 = 0 \\ \iff & x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} \\ \iff & x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = -1. \end{aligned}$$

► En revanche, l'équation $e^{3x^2+5x+2} = -2$ n'a pas de solution car $e^t > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

► La dernière question concerne une équation de second degré en e^x de discriminant positif. A priori il y aura deux possibilités pour e^x ; mais ici une seule sera possible :

$$\begin{aligned} & (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0 \\ \iff & e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \\ \iff & e^x = 3 \quad \text{ou} \quad e^x = -1 \\ \iff & e^x = 3 \quad (\text{car } e^x \text{ positif}) \\ \iff & x = \ell n(3). \end{aligned}$$

Solution 24.

1. Avec la définition $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ on trouve

$$(f \circ g)(x) = \ell\mathrm{n}((\sqrt{x}+1)-1) = \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}(x) \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt{\ell\mathrm{n}(x-1)}+1$$

$$(f \circ h)(x) = \ell\mathrm{n}(e^{2x}-1) \qquad (h \circ f)(x) = e^{2\,\ell\mathrm{n}(x-1)} = \left(e^{\ell\mathrm{n}(x-1)}\right)^2 = (x-1)^2$$

$$(g \circ h)(x) = e^{x}+1 \qquad (g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x}+1}+1$$

$$(h \circ h)(x) = e^{2e^{2x}}$$

(Remarquons qu'on peut aussi écrire $(f \circ h)(x) = \ell\mathrm{n}(e^x-1)+\ell\mathrm{n}(e^x+1)$ si l'on préfère...)
Certaines parmi ces expressions sont faciles à dériver directement :

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2x} \qquad (h \circ f)'(x) = 2x-2 \qquad (g \circ h)'(x) = e^x.$$

Pour les autres on utilise la formule de dérivation d'une fonction composée : $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$. On détermine d'abord les dérivées de f, g et h,

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad h'(x) = 2e^{2x}.$$

Ainsi

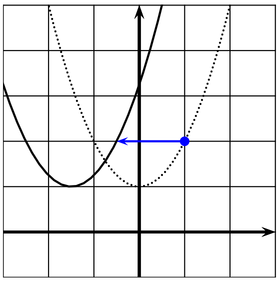
$$(g \circ f)'(x) = (g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ell\mathrm{n}(x-1)}} \times \frac{1}{x-1}$$

$$(f \circ h)'(x) = (f'(h(x))h'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$$

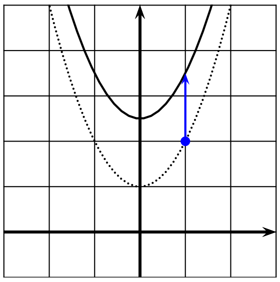
$$(g \circ g)'(x) = (g'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x(\sqrt{x}+1)}}$$

$$(h \circ h)'(x) = (h'(h(x))h'(x) = e^{2e^{2x}}2e^{2x} \times 2 = 4e^{2(e^{2x}+x)}$$

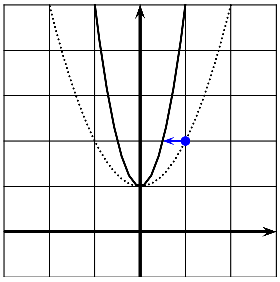
2. Dans les exemples ci-dessous la courbe de φ est représentée en pointillés. On a pris $b = 1.5$ et $a = 2$.



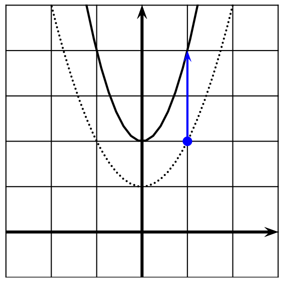
$x \mapsto \varphi(x+b) = (x+b)^2+1$
translation horizontale de
b unités vers la gauche



$x \mapsto \varphi(x)+b = x^2+1+b$
translation verticale de b
b unités vers le haut



$x \mapsto \varphi(ax) = (ax)^2+1$
dilatation horizontale
de facteur $\frac{1}{a}$



$x \mapsto a\varphi(x) = a(x^2+1)$
dilatation verticale
de facteur a

Solution 25.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1+0 = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{x^2}{3}\right) = -1+\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^4-5x\right) = \infty-(-\infty) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(x^2+5x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1+\frac{5}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2(1-\frac{3}{x})} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x^2}{1+8x-3x^5} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-5x}{x-2} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-3x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{x} - 1 = -1 \qquad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \ell\text{n}(3x-1) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \ell\text{n}\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \ell\text{n}(t) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell\text{n}(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

On remarque que la dernière limite n'est as une forme indéterminée. Contrairement à la suivante (qu'on ramène à une croissance comparée) :

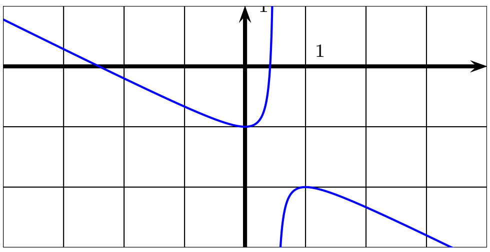
$$\lim_{x\to 0^+} x\,\ell\text{n}(x) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\,\ell\text{n}(t^{-1}) = \lim_{t\to\infty} \frac{-\ell\text{n}(t)}{t} = 0$$

Solution 26.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. On calcule donc quatre limites :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\searrow\frac{1}{2}} f(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x\nearrow\frac{1}{2}} f(x) = \infty\,.$$



2. L'expression $g(x)$ a un sens si et seulement si le terme sous la racine carrée est positif, c'est-à-dire si $x(x+2) \geqslant 0$. Donc le domaine de définition de la fonction g est $]-\infty, -2] \cup [0, \infty[$. Les limites en 0 et en -2 sont innocentes car ces points ne sont pas des singularités ; en fait g est continue et définie en ces points.

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = g(0) = 0\,, \qquad \lim_{x\nearrow 0} g(x) = g(-2) = 2\,.$$

Pour la limite en $-\infty$ on peut écrire

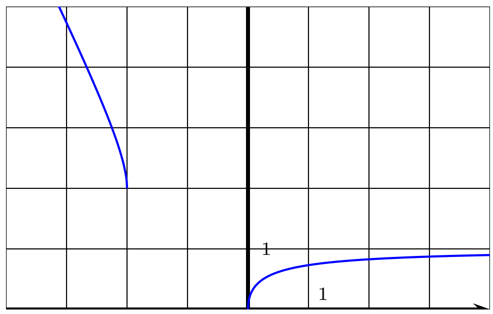
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2(1+2x^{-1})} - x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{1+2x^{-1}} - x\right)\\ &= \infty - (-\infty) = \infty.\end{aligned}$$

Pour calculer la limite en $+\infty$ on utilise l'astuce de « l'expression conjuguée » :

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x}\\ &= \frac{\sqrt{x^2+2x}^{\,2} - x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2x^{-1}} + 1} = 1\,.$$



Solution 27.

L'idée générale est de factoriser au numérateur et au dénominateur le terme dominant.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2+6}{3x^3-8x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1+5x^{-1}+6x^{-3})}{x^3(3-8x^{-2}+x^{-3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+5x^{-1}+6x^{-3}}{3-8x^{-2}+x^{-3}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+5x-1}{3x^3+8x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(2+5x^{-3}-x^{-4})}{x^3(3+8x^{-1}+x^{-3})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(2+5x^{-3}-x^{-4})}{3+8x^{-1}+x^{-3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+5x^2}{1+8x-3x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(1+5x^{-2})}{x^5(x^{-5}+8x^{-4}-3)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+5x^{-2}}{x(x^{-5}+8x^{-4}-3)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-3x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+5x^2}{1+8x-3x^5} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{(cette limite n'est pas une forme indéterminée)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+5x^2+3}{8x-3x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+5x^2+3}{x(8-3x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{8x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-6}{4(x-2)} = \infty$$

Pour la suite on utilise les croissances comparées à l'infini : La fonction logarithme croit plus lentement que la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha > 0$) ; et cette dernière croit plus lentement que la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ de base $a > 1$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell n(x^5)}{\sqrt{x}}=5\lim_{x\to\infty}\frac{\ell n(x)}{x^{1/2}}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{\ell n(\sqrt[3]{x})}=3\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+2x^{-2})}{\ell n(x)}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{2^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2 \text{ où } f(x)=e^{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\ell n(x^2)-x)=\lim_{x\to\infty}(2\,\ell n(x)-x)=\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{2\,\ell n(x)}{x}-1\right]=\infty\times(0-1)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^3}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{0.5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{2^{-x}}=\lim_{x\to\infty}2^x x^5=\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}(\ell n(x^2)-x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=3 \quad \text{avec} \quad g(x)=\ell n(1+3x).$$

Solution 28.

$$\begin{aligned}
f(x)&=3x-2 & f'(x)&=3\\
g(x)&=4x^{-1}+x & g(x)&=-4x^{-2}+1\\
h(x)&=\frac{2x-1}{x+2} & h'(x)&=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}\\
j(x)&=5(x-2)(x^2-1) & j'(x)&=5[(x^2-1)+(x-2)2x]=5(3x^2-4x-1)\\
\text{ou}\quad j(x)&=5(x^3-2x^2-x+2) & j'(x)&=5(3x^2-4x-1)\\
k(x)&=(3x^2+1)^9 & k'(x)&=9(3x^2+1)^8 6x=54x(3x^2+1)^8\\
\ell(x)&=\frac{1}{7}(x^3+3x^2-1) & \ell'(x)&=\frac{1}{7}(3x^2+6x)\\
m(x)&=3(x^2+4)^{-1} & m(x)&=3(-1)(x^2+4)^{-2}2x=-\frac{6x}{(x^2+4)^2}\\
n(x)&=6x^{\frac{1}{2}} & n'(x)&=3x^{-\frac{1}{2}}\\
p(x)&=4x^{\frac{1}{2}}-3x^2 & p'(x)&=2x^{-\frac{1}{2}}-6x\\
u(x)&=(x^2+2)^{\frac{1}{3}} & u'(x)&=\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}2x=\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}
\end{aligned}$$

Solution 29.

1. Les calculs suivants sont en euro.

1.a. Dans ce cas le capital après un an est

$$1.05\times 10\,000=10\,500.$$

Donc les intérêts s'élèvent à 500 €.

1.b. Dans ce cas le capital après un an est

$$\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12}\times 10\,000\approx 10\,511.62.$$

Donc les intérêts s'élèvent à 511.62 €.

1.c. Dans ce cas le capital après un an est

$$\left(1+\frac{0.05}{365}\right)^{365}\times 10\,000\approx 10\,512.67.$$

Donc les intérêts s'élèvent à 511.62 €.

1.d. Dans ce cas (voir remarque) le capital après un an est

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^n\times 10\,000=e^{0.05}\times 10\,000 \approx 10\,512.71.$$

Donc les intérêts s'élèvent à 512.71 €.

2. D'après ce qu'on vient de voir le facteur multiplicateur annuel est $e^{0.05}$. Par conséquence, en n années le capital initial est multiplié par $(e^{0.05})^n=e^{0.05n}$.

2.a. On cherche n tel que $e^{0.05n}=3$. On trouve $n=\ell n(3)/0.05\approx 21.97$. Il faut donc attendre 22 ans.

2.b. On cherche C tel que $e^{0.05\times 10}C=25\,000$ €. Donc

$$C=e^{-0.5}\times 25\,000\,€\approx 15\,163.27\,€.$$

Remarque – *Dans la question 1.c on a utilisé la formule suivante qui donne l'exponentielle comme limite d'une suite :*

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}:\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=e^x$$

La formule est évidente pour $x = 0$. Prouvons-la pour $x \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ell\mathrm{n}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] &= \lim_{n\to\infty} n\,\ell\mathrm{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &= x\lim_{n\to\infty}\frac{\ell\mathrm{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ell\mathrm{n}(1)}{\frac{x}{n}}\\ &= x\lim_{h\to 0}\frac{\ell\mathrm{n}(1+h)-\ell\mathrm{n}(1)}{h}\\ &\overset{(*)}{=} x\,\ell\mathrm{n}'(1) = x.\end{aligned}$$

Dans l'égalité $(*)$ on a utilisé la définition de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. Par continuité

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ell\mathrm{n}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]} = \exp(x)\,.$$

Solution 30.

$$\begin{aligned}
d(x) &= 3^{-x} & d'(x) &= -\ell\mathrm{n}(3)3^{-x}\\
e(x) &= 5^{2x^3-x+1} & e'(x) &= \ell\mathrm{n}(5)5^{2x^3-x+1}(6x^2-1)\\
f(x) &= \frac{1}{3}(2x^3-x+1)^3 & f'(x) &= (2x^3-x+1)^2(6x^2-1)\\
g(x) &= e^{x^2} & g'(x) &= 2xe^{x^2}\\
h(x) &= (3x-2)^{-1} & h'(x) &= -(3x-2)^{-2}\times 3 = -\frac{3}{(3x-2)^2}\\
j(x) &= (2-3x)^{-3} & j'(x) &= -3(2-3x)^{-4}\times(-3) = \frac{9}{(2-3x)^4}\\
k(x) &= \left(\ell\mathrm{n}(2x^2+1)\right)^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2}\left(\ell\mathrm{n}(2x^2+1)\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{4x}{2x^2+1} = \frac{2x}{(2x^2+1)\sqrt{\ell\mathrm{n}(2x^2+1)}}\\
\ell(x) &= \exp\left((1-x)^{\frac{1}{3}}\right) & \ell'(x) &= \exp\left((1-x)^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(-1) = -\frac{e^{\sqrt[3]{1-x}}}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}\\
m(x) &= (2x^2+1)^{-\frac{1}{2}} & m'(x) &= -\frac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times 4x = -\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}\\
n(x) &= e^{\ell\mathrm{n}(3)x}x & n'(x) &= \ell\mathrm{n}(3)e^{\ell\mathrm{n}(3)x}x + e^{\ell\mathrm{n}(3)x} = (\ell\mathrm{n}(3)x+1)3^x
\end{aligned}$$

Solution 31.

▶ On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On fait l'approximation de la courbe par la tangente. Pour x proche de 100 on a

$$f(x) \approx f(100) + f'(100)(x-100) = 10 + \frac{1}{20}(x-100).$$

Puisque 99 peut être considéré comme proche de 100, on a

$$\sqrt{99} \approx 10 + \frac{1}{20}\times(-1) = 9.95.$$

La valeur exacte de $\sqrt{99}$ est un peu plus petite car la courbe est située en dessous de la tangente (fonction concave).

▶ Pour x proche de 0 on a

$$\exp(x) \approx \exp(0) + \exp'(0)(x-0) = 1+x.$$

Donc $e^{0,01} \approx 1,01$. La valeur exacte de $e^{0,01}$ est un peu plus grande car la courbe est située en dessus de la tangente (fonction convexe).

▶ On considère la fonction $g : x \mapsto x^4$. Pour x proche de 5 on a

$$g(x) \approx g(5) + g'(5)(x-5) = 625 + 4\times 5^3(x-5).$$

Donc

$$\begin{aligned}5.04^4 &\approx 625 + 4\times 5^3\times 0.04\\ &= 625 + 500\times 0.04 = 645.\end{aligned}$$

La valeur exacte de 5.04^4 est un peu plus grande car la courbe est située en dessus de la tangente (fonction convexe).

▶ On considère la fonction $h : x \mapsto x^{-2}$. Pour x proche de 50 on a

$$\begin{aligned}h(x) &\approx h(50) + h'(50)(x-50)\\ &= 50^{-2} - 2\times 50^{-3}(x-50).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{51^2} &\approx \frac{1}{50^2} - \frac{2}{50^3}\\ &= \frac{2^2}{2^2 50^2} - \frac{2^4}{2^3 50^3}\\ &= \frac{4}{100^2} - \frac{16}{100^3}\\ &= 0.0004 - 0.000016 = 0.000384.\end{aligned}$$

La valeur exacte de $1/51^2$ est un peu plus petite car la courbe est située en dessous de la tangente (fonction concave).

Solution 32.

1. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ Comme $g(x) = x^{-3}$ on a $g'(x) = -3x^{-4}$.

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(e^{-x^2}\right)^{-3} = e^{3x^2}$, d'où $(g \circ f)'(x) = 6xe^{3x^2}$.

3. On trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = 0 \quad \text{(par croissances comparées)},\\
\lim_{x\to 0^+} f(g(x)) &= \lim_{x\to 0^+} f(x^{-3}) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t^2} = 0,\\
\text{ou } \lim_{x\to 0^+} f(g(x)) &= \lim_{x\to 0^+} e^{-(x^{-3})^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x^{-6}} = e^{-\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Solution 33.

Points stationnaires en 1950 (palier), 1980 (maximum) et 2000 (minimum). Points d'inflexion en 1930, 1950, 1970 et 1990.

[1900, 1930]	[1930, 1950]	[1950, 1970]	[1970, 1980]	[1980, 1990]	[1990, 2000]	[2000, 2020]
$p' \geqslant 0,\ p'' \geqslant 0$	$p' \geqslant 0,\ p'' \leqslant 0$	$p' \geqslant 0,\ p'' \geqslant 0$	$p' \geqslant 0,\ p'' \leqslant 0$	$p' \leqslant 0,\ p'' \leqslant 0$	$p' \leqslant 0,\ p'' \geqslant 0$	$p' \geqslant 0,\ p'' \geqslant 0$
hausse accélérée	hausse ralentie	hausse accélérée	hausse ralentie	baisse accélerée	baisse ralentie	hausse accélerée

Solution 34.

1. On dérive :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{60}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 250),\\
f'(x) &= \frac{1}{60}(12x^3 - 12x^2 - 72x) = \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - 6x),\\
f''(x) &= \frac{1}{5}(3x^2 - 2x - 6).
\end{aligned}$$

On a

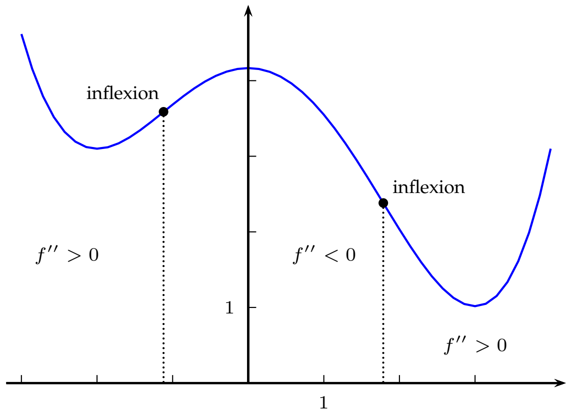
$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff x^3 - x^2 - 6x = 0\\
&\iff x(x^2 - x - 6) = 0
\end{aligned}$$

Les points stationnaires sont donc en 0 et en les racines du trinôme $x^2 - x - 6$, c'est-à-dire en -2 et en 3. Pour voir si ce sont des maxima ou des minima on calcule le signe de la dérivée seconde en ces points.

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \frac{1}{5}(0 - 6) < 0,\\
f''(-2) &= \frac{1}{5}(12 + 4 - 6) > 0,\\
f''(3) &= \frac{1}{5}(27 - 6 - 6) > 0.
\end{aligned}$$

Par conséquence f possède un maximum en 0 et des minima en -2 et 3.

2. Les points d'inflexions sont là où la dérivée seconde change de signe. Un petit calcul avec le discriminant montre que f'' est négative sur l'intervalle $[\frac{1-\sqrt{19}}{3}, \frac{1+\sqrt{19}}{3}] \approx [-1.12, 1.786]$; donc f est concave entres les deux points d'inflexions, dont les abscisses sont approximativement -1.12 et 1.786 et f est convexe ailleurs.



Solution 35.

1. La recette R est donnée par la formule $R(x) = xf(x)$. On calcule $R(200) \approx 131\,429$, $R(600) \approx 188\,571$, $R(1\,000) \approx 428\,571$.
Les recettes semblent augmenter quand la quantité de marchandises vendue augmente (ce qui est intuitivement assez logique).

2. Les coûts fixes s'obtiennent à partir de $C(x)$ quand $x = 0$: $C(0) = 10\,000$. Les coûts fixes sont de 10 000.

3. Les bénéfices $B(x)$ réalisés par l'entreprise se calculent en faisant la différence des recettes et des coûts, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
B(x) = R(x) - C(x) &= \frac{x^3}{700} - 2x^2 + 1\,000x - (10\,000 + 10x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4\,000})\\
&= \frac{47x^3}{28\,000} - \frac{7x^2}{3} + 990x - 10\,000
\end{aligned}$$

Pour étudier les variations de la fonction B on calcule la dérivée B' et la dérivée seconde B''. On trouve

$$B'(x) = \frac{141x^2}{28\,000} - \frac{14x}{3} + 990\,, \qquad B''(x) = \frac{141x}{14\,000} - \frac{14}{3}.$$

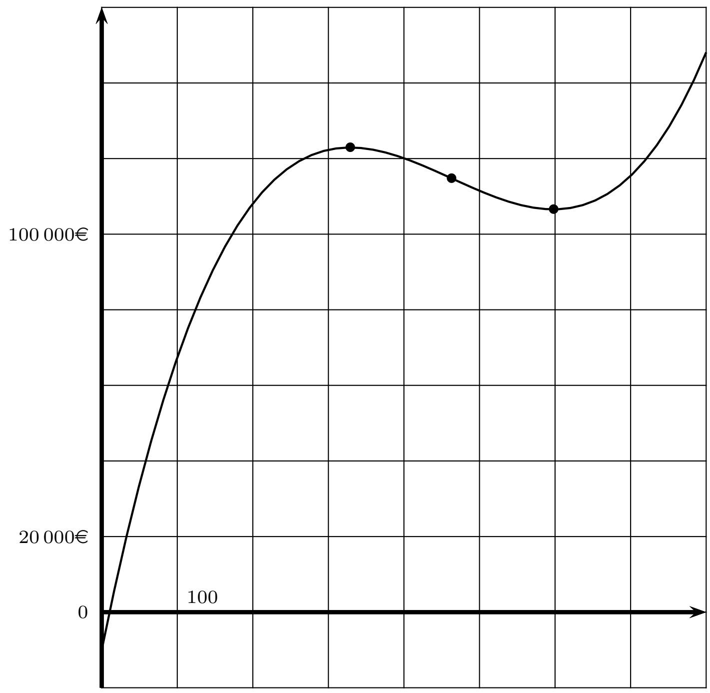
On calcule le discriminant $\Delta = \left(\frac{14}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{141}{28\,000} \times 990 \approx 1.84 \ > 0$. Les deux valeurs de x qui annulent la dérivée B' (les points stationnaires de B) sont

$$x_1 \approx \frac{14/3 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 141/28\,000} \approx 329 \qquad \text{et} \qquad x_2 \approx \frac{14/3 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 141/28\,000} \approx 598\,.$$

On trouve que $B''(329) < 0$ et $B''(598) > 0$. Donc il y a un maximum en 329 et un minimum en 598. En conclusion, le bénéfice B est croissant sur l'intervalle $[0, 329]$, puis décroissant sur l'intervalle $[329, 598]$, puis redevient croissant sur l'intervalle $[598, \infty]$.

Cherchons les points d'inflexion de B, c'est-à-dire les points ou B'' change de signe. Or ici B'' est une fonction affine, donc elle change de signe exactement au point où elle s'annule. En résolvant $B''(x) = 0$ on trouve que le seul point d'inflexion est en $x = \frac{14}{3} \times \frac{14\,000}{141} \approx 463$. On déduit que $B'' < 0$ et B concave sur $[0, 463]$; et que $B'' > 0$ et B convexe sur $[463, \infty]$;

Pour le dessin on calcule $B(0) = -10\,000$, $B(329) \approx 122\,924$, $B(598) \approx 106\,568$, $B(463) \approx 114\,778$, $B(800) \approx 148\,095$.



4. Le coût marginal $C_m(x)$ est la dérivée du coût $C(x)$. On obtient donc :

$$C_m(x) = 10 + \frac{2x}{3} - \frac{3x^2}{4\,000}\,.$$

5. Pour trouver le maximum du coût marginal, on calcule la dérivée du coût marginal :

$$C'_m(x) = \frac{2}{3} - \frac{6x}{4\,000}\,.$$

Et on trouve que $C'_m(x) = 0$ lorsque $\frac{2}{3} - \frac{6x}{4\,000} = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{8\,000}{18} \approx 444$. De plus, $C'_m(x) > 0$ si x est inférieur à 444 et $C'_m(x) < 0$ si x est supérieur à 444.

En conclusion, le coût marginal est maximum lorsque $x = 444$.

Maintenant, on cherche à savoir si le coût marginal s'annule ; donc on résout $10 + \frac{2x}{3} - \frac{3x^2}{4\,000} = 0$. On calcule $\Delta = \frac{2^2}{3^2} - 4 \times 10 \times \left(-\frac{3}{4\,000}\right) \approx 0,47$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{2}{3} - 0,69}{-2 \times \frac{3}{4\,000}} \approx 904 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-\frac{2}{3} + 0,69}{-2 \times \frac{3}{4\,000}} \approx -16\ .$$

Sur l'intervalle qui nous intéresse, le coût marginal s'annule pour $x \approx 904$.

Interprétation :

— Le coût marginal est maximum lorsque $x = 444$, donc c'est autour de cette valeur de x que l'entreprise n'a pas grand intérêt à augmenter sa production, car chaque unité produite en plus lui coûte très cher. Et on voit bien sur la courbe du bénéfice que c'est autour de $x = 444$ que le bénéfice est décroissant. Par contre, une fois que l'on a passé le cap de $x \approx 600$, le coût marginal a suffisamment baissé pour que cela redevienne intéressant d'accroître sa production.

— Le coût marginal s'annule pour $x \approx 904$, c'est-à-dire que autour de cette valeur, cela ne coûte quasiment rien d'augmenter sa production. Il n'y a donc aucune raison de ne pas le faire.

Solution 36.

1. On a
$$f'(p) = -\frac{20000}{2\sqrt{100-p}}.$$
L'élasticité est donnée par
$$f'(p)\frac{p}{f(p)} = -\frac{p}{2(100-p)}\ .$$

2. L'élasticité pour $p = 50$ vaut -0.5 ; cela signifie qu'une augmentation du prix de 1 % entraîne une baisse de la vente de 0.5 %. Donc lorsque le prix augmente de 2 % la vente diminue de 1 %.

Remarque – *On peut vérifier le résultat par le calcul direct :*
Prix initial 50€ et demande initiale $f(50)$. Après une augmentation du prix de 2% on obtient un prix de 51€ et une demande de $f(51)$. Ainsi

$$\frac{\text{demande finale}}{\text{demande initiale}} = \frac{f(51)}{f(50)} = \frac{20000\sqrt{49}}{20000\sqrt{50}}$$
$$= \frac{7}{\sqrt{50}} \approx 0.98995$$

La diminution est donc de $1 - 0.98995 = 1.005$%.

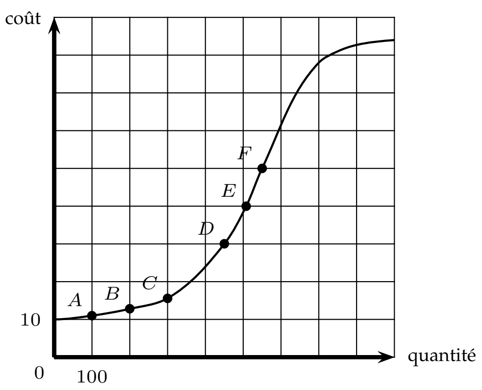
Solution 37.

1. On a $C(t) = st$, $R(t) = pf(t)$ et $B(t) = R(t) - C(t) = 3pt^{\frac{1}{3}} - st$.

2. On trouve $B'(t) = pt^{-\frac{2}{3}} - s$ et $B''(t) = -\frac{2}{3}pt^{-\frac{5}{3}} < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Donc B est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $B'(t) = 0 \iff pt^{-\frac{2}{3}} = s \iff t = (\frac{p}{s})^{\frac{3}{2}}$.
Vue la concavité, cet unique point stationnaire est bien le point qui maximise le bénéfice.

Solution 38.



1. On approxime le coefficient directeur de la tangente en A par celui de la droite (AB) :
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1.8100 = 0.018$$
Donc l'équation de la tangente en A est environ $y \approx 0.018(x - 100) + 11$. Pour $x = 0$ on trouve $y \approx 9.8$. Les coûts fixes s'élèvent à 9.80 € environ.

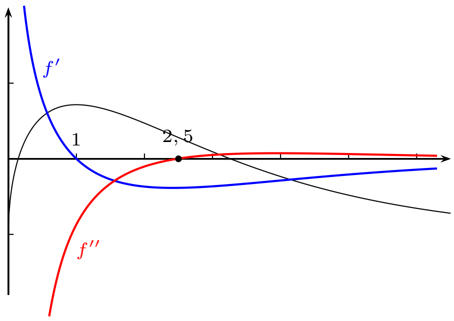
2. On a
$$f'(200) \approx \frac{15,6-11}{300-100} = \frac{4,6}{200} = 0,023.$$
Ainsi l'équation de la tangente en B est
$$y \approx 12,8 + 0,023(x - 200).$$
Cette forme est pratique pour remplacer des valeurs x proches de 200, donc je m'abstiens à développer la parenthèse !

3. Le coût marginal lorsqu'on fabrique 200 unités est de $0,023$ €. La fabrication de 210 unités coûte $12,80 + 0,23 = 13,03$ €.

4. Le coût marginal pour 508 unités est
$$f'(508) \approx \frac{50-30}{550-450} = \frac{20}{100} = 0,2.$$
Ainsi fabriquer 507 unités coûte $40 - 0,2 = 39,8$ €.

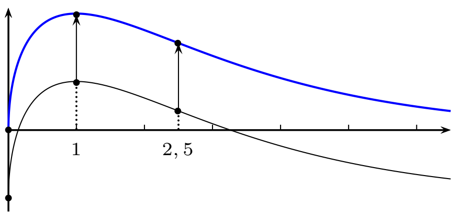
Solution 39.

1. Dérivée et dérivée seconde :

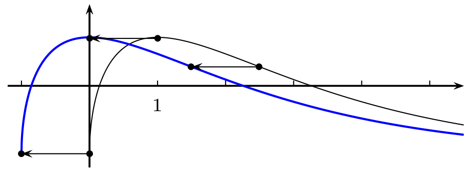


2.

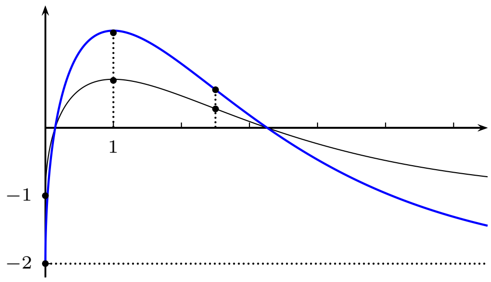
$g(x) = f(x) + 1$ (translation verticale)



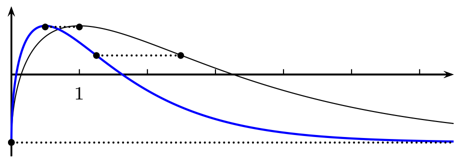
$h(x) = f(x+1)$ (translation horizontale)



$u(x) = 2f(x)$ (amplification)



$v(x) = f(2x)$ (variation accélérée)



Solution 40.

1. Réponse C. En effet, on a $f'(3) < f'(7/2)$ car en $x = 3$ la courbe descend plus fortement qu'en $x = 7/2$.
2. Réponse A car au voisinage de $x = 5$ la dérivée de f est croissante.
3. Réponse B. En effet, sur l'intervalle $[3, 7]$ la dérivée de f est croissante.
4. Réponse A. En effet avec on calcule

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 15x}{x+5} \qquad f'(x) = \frac{(3x^2 - 16x + 15)(x+5) - (x^3 - 8x^2 + 15x)}{(x+5)^2} \qquad f'(0) = \frac{15 \times 5}{5^2} = \frac{15}{5} = 3$$

5. Réponse B car $f(x+3) = \dfrac{x(x+3)(x-2)}{x+8}$.

Solution 41.

1. Réponse A.
2. Réponse A.
3. Réponse C. La dérivée f' est décroissante.
4. Réponse A. On calcule

$$f'(x) = \frac{1000(2x+2)}{x^2 + 2x + 1}, \qquad f'(1) = 1000.$$

5. Réponse B car

$$g(x) = f(2x) = 1000\,\ell\text{n}\left((2x)^2 + 2x + 1\right) + 1000.$$