Contrôle 1 - Corrigé

Les corrigés du sujet A et du sujet B sont à la suite l'un de l'autre.

Sujet A

Exercice 1 : QCM

1. Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne et on note :
   A :"Tirer une boule blanche"
   B :"Tirer une boule ni rouge, ni blanche"
   C :"Tirer une boule noire ou un boule blanche".
   Que peut-on-dire des ces trois évènements ?
   - ☐ A et C sont incompatibles.
   - ☒ A et B sont incompatibles.
   - ☐ B et C sont incompatibles.
2. Un numéro de téléphone est composé de 10 chiffres. Je cherche à me souvenir d'un numéro dont je ne connais que le début "06" et la fin "87". Je sais aussi que ce numéro contient le chiffre "5" exactement une fois. Le nombre de numéros de téléphone possibles est :
   - ☐ 531441
   - ☐ 362880
   - ☒ 354294 ($= 5 \times 9^5$)
3. Pour disputer un match, 10 personnes (discernables) se répartissent en deux équipes de 5 membres chacune. Le nombre de matchs différents possibles est :
   - ☐ 252
   - ☐ 158
   - ☒ 126

   Le nombre de possibilités pour former la première équipe est $\binom{10}{5}$ *et pour la seconde* $\binom{5}{5} = 1$. *Toutefois il y a un effet de symétrie, il faut donc penser à diviser par deux, ce qui donne :*

   $$\#matchs = \frac{\binom{10}{5}}{2} = 126.$$
4. Une urne contient 50 boules indiscernables, dont 15 rouges, 19 vertes et 16 jaunes. On tire 5 fois une boule avec remise et le tirage est gagnant seulement s'il contient 2 boules rouges, 2 vertes et 1 jaune (quelque soit l'ordre dans lequel on les obtient). La probabilité que le tirage soit gagnant est environ
   - ☐ 0,4%.
   - ☒ 12%.
   - ☐ 27%.

Notons X_1 le nombre de boules rouges obtenues, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules jaunes. Le triplet (X_1,X_2,X_3) suit la loi multinomiale $\mathcal{M}(5, \frac{15}{50}, \frac{19}{50}, \frac{16}{50})$ On a alors :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\} \cap \{X_3 = 1\}) = \binom{5}{2,2,1} \left(\frac{15}{50}\right)^2 \left(\frac{19}{50}\right)^2 \left(\frac{16}{50}\right)$$

5. On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est environ :
   - ☐ 38%
   - ☐ 56%
   - ☒ 88% ($\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (\frac{1}{2})^3$)

Exercice 2 Un sac contient 5 jetons verts et 4 jetons rouges. On tire au hasard 3 jetons du sac. Calculer les probabilités :

1. de tirer exactement 3 jetons verts,
2. de ne tirer aucun jeton vert,
3. de tirer au plus 2 jetons verts,
4. de tirer exactement 1 jeton vert.

Dans cet exercice on peut procéder de deux manières différentes : soit en considérant que les tirages sont simultanés (c'est ce choix qui a été fait pour la correction), soit en considérant que les tirages sont successifs et sans remise. Les deux méthodes donnent le même résultat.

Lorsqu'on tire 3 jetons parmi 9, il y a $\binom{9}{3} = 84$ possibilités. Il suffit pour chaque question de déterminer le nombre de cas favorables.

1. *Notons A l'événement " Tirer 3 jetons verts ".*
   Il y a 5 jetons verts, le nombre de cas favorables est donc $\binom{5}{3} = 10$. On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$.
2. *Notons B l'événement " Ne tirer aucun jeton vert". Cet évènement est le même que "Tirer 3 jetons rouges"*
   Il y a 4 jetons rouges, le nombre de cas favorables est donc $\binom{4}{3} = 4$. On a donc $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.
3. *Notons C l'événement " Tirer au plus 2 jetons verts". Cet évènement est l'évènement contraire de l'évènement A. On a donc $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$.*
4. *Notons D l'événement "Tirer exactement un jeton vert". On a $\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{84} = \frac{5}{14}$.*

NB : Notons X le nombre de jetons verts tirés, alors X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(3, 5, 9)$.

Exercice 3 Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur- réservation afin d'abaisser les coûts. Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations. On suppose que la probabilité qu'un client donné se presente à l'embarquement est de $0,97$. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de clients se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(202, 0.97)$
2. Quelle est la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement ?

$$\mathbb{P}(X = 202) = 0,97^{202} \approx 0,002128$$

3. Quelle est la probabilité que la campagnie se trouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places) ?

$$\mathbb{P}(X > 200) = \mathbb{P}(X = 202) + \mathbb{P}(X = 201) = 0,97^{202} + \binom{202}{201} 0,97^{201} \times 0,03 \approx 0,01542$$

Exercice 4 Un photographe animalier souhaite photographier un chat sauvage, pour cela il se rend dans une réserve. Pendant la journée, il se poste dans la forêt là où passe le chat et le soir il dort à l'hôtel de la réserve. On estime que la probabilité d'apparition du chat un jour donné est de $0,1$ et que ses apparitions sont indépendantes. Le photographe partira le jour suivant l'apparition du chat (ex : si le chat apparaît le 3ème jour, le photographe sera resté 3 jours et 3 nuits dans la réserve et partira la 4ème jour). On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre entier de jours où le photographe reste dans la réserve.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0.1)$.
2. Calculer la probabilité de photographier le chat au cours des cinq premiers jours.
   La probabilité de photographier le chat au cours des 5 premiers jours est donc :

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - (0,9)^5 = 0,40951.$$

3. Le photographe n'habitant pas à côté de l'endroit où passe le chat, chaque soir il dort à l'hôtel. Le prix par nuit de la chambre d'hôtel est de 50 euros la première nuit, puis l'hotelier applique une réduction de 2% à chaque nuit supplémentaire.
   (a) Combien aura-t-il dépensé s'il photographie le chat le 5ème jour ? *S'il photographie le chat le 5ème jour alors il aura payé 5 nuits d'hotel, ce qui revient à*

$$\begin{aligned} FraisTotal &= \sum_{k=0}^{4} 50 \times (0,98)^k \\ &= 50 \times \sum_{k=0}^{4} 0,98^k \\ &= 50 \times \left(\frac{1 - 0,98^5}{1 - 0,98} \right) \\ &\approx 240,2 \text{ €}. \end{aligned}$$

   (b) Quelle est la probabilité qu'il dépense plus de 500 euros en nuits d'hôtel ?
   Si le photographe reste n jours alors le coût total du séjour en chambre d'hôtel s'élèvera à :

$$FraisTotal = \sum_{k=0}^{n-1} 50 \times 0,98^k,$$

le premier jour étant le jour 0. *On cherche donc le plus petit entier* n *tel que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} 50 \times 0,98^k &> 500\\ \sum_{k=0}^{n-1} 0,98^k &> 10\\ \left(\frac{1-0,98^n}{1-0,98}\right) &> 10\\ 0,98^n &< 1 - 10 \times (0,02)\end{aligned}$$

En passant au logarithme on trouve alors

$$\begin{aligned}\ln(0,98^n) &< \ln(1 - 10 \times (0,02))\\ n &> \frac{\ln(1 - 10 \times (0,02))}{\ln(0,98)} \approx 11,05.\end{aligned}$$

Ainsi la probabilité qu'il dépense plus de 500 *euros est égale à la probabilité qu'il reste au moins* 12 *jours. C'est à dire :*

$$\mathbb{P}(X > 11) = (0,9)^{11} \approx 0,3138.$$

4. Pour faire un album, le photographe préfère maintenant réaliser des clichés sur plusieurs jours. Il décide alors de rester dans la réserve jusqu'au 5ème jour où le chat apparaît. Quelle est la probabilité qu'il reste 30 jours dans la réserve ?
Attention ici les conditions de départ du photographe ont changé, la v.a X *ne suit plus une loi géométrique,* X *suit la loi binomial négative* $\mathcal{BN}(5, 0.1)$. *On a alors :*

$$\mathbb{P}(X = 30) = \binom{29}{4}(0.1)^5(0.9)^{25} \approx 0,017$$

Exercice 5 : On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de cholestérol anormalement élevé. Pour cela 70% des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo. Ensuite on mesure la baisse du cholestérol.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux de cholestérol avec une probabilité de $0,9$. En revanche on ne constate aucune baisse de ce taux pour 80% des individus ayant pris le placebo.
Dans la suite on note M l'évènement "avoir pris le médicament" et B "avoir une baisse de cholestérol".

1. Calculer $\mathbb{P}(\overline{B})$.
D'après les données de l'énoncé, on a $\mathbb{P}(M) = 0.7$ *et* $\mathbb{P}_M(\overline{B}) = 0.1$, *on en déduit donc :*

$$\mathbb{P}(\overline{B} \cap M) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(\overline{B}) = 0.07.$$

De l'énoncé on peut aussi déduire les probabilités $\mathbb{P}(\overline{M}) = 0.3$ *et* $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{B}) = 0.8$, *on a donc :*

$$\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{M}) = \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{B}) = 0.24.$$

On en déduit donc que $\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B} \cap M) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{M}) = 0.31.$

2. On mesure le taux de cholestérol d'un individu pris au hasrd. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de cholestérol ?
On cherche la probabilité $p_{\bar{B}}(M)$. On a :

$$\mathbb{P}_{\overline{B}}(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{\mathbb{P}_M(\overline{B}) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{7}{31} \approx 0,2258.$$

Sujet B

Exercice 1 : QCM

1. Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne et on note :
A :"Tirer une boule noire"
B :"Tirer une boule rouge ou une boule noire"
C :"Tirer une boule ni blanche, ni noire".
Que peut-on-dire des ces trois évènements ?
   - ☒ A et C sont incompatibles.
   - ☐ A et B sont incompatibles.
   - ☐ B et C sont incompatibles.
2. Un numéro de téléphone est composé de 10 chiffres. Je cherche à me souvenir d'un numéro dont je ne connais que le début "06" et la fin "87". Je sais aussi que ce numéro contient le chiffre "8" exactement une fois. Le nombre de numéros de téléphone possibles est :
   - ☒ 531441 ($= 9^6$)
   - ☐ 362880
   - ☐ 354294
3. A partir d'un groupe de 5 hommes et 7 femmes on veut former un comité de 5 personnes comportant 2 hommes et 3 femmes. Le nombre de comités possibles est :
   - ☐ 175
   - ☐ 270
   - ☒ 350
   Le nombre de possibilités pour choisir les deux hommes est $\binom{5}{2}$ et le nombre de possibilités pour choisir les trois femmes est $\binom{7}{3}$. Ici il n'y a pas d'effet de symétrie, le nombre de comités différents est donc :

$$\#Comites = \binom{5}{2}\binom{7}{3} = 350.$$

4. Une urne contient 60 boules indiscernables, dont 20 rouges, 24 vertes et 16 jaunes. On tire 5 fois une boule avec remise et le tirage est gagnant seulement s'il contient 2 boules rouges, 2 vertes et 1 jaune (quelque soit l'ordre dans lequel on les obtient). La probabilité que le tirage soit gagnant est environ
   - ☒ 14%.
   - ☐ 38%.
   - ☐ 87%.

Notons X_1 le nombre de boules rouges obtenues, X_2 le nombre de boules vertes et X_3 le nombre de boules jaunes. Le triplet (X_1,X_2,X_3) suit la loi multinomiale $\mathcal{M}(5, \frac{20}{60}, \frac{24}{60}, \frac{16}{50})$ On a alors :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\} \cap \{X_3 = 1\}) = \binom{5}{2, 2, 1} \left(\frac{20}{60}\right)^2 \left(\frac{24}{60}\right)^2 \left(\frac{16}{60}\right)$$

5. On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est environ :
   ☒ 88% ($\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (\frac{1}{2})^3$)
   ☐ 56%
   ☐ 38%

Exercice 2 Un sac contient 5 jetons verts et 4 jetons rouges. On tire au hasard 3 jetons du sac. Calculer les probabilités :

1. de tirer exactement 3 jetons rouges,
2. de ne tirer aucun jeton rouge,
3. de tirer au plus 2 jetons rouges,
4. de tirer exactement 1 jeton rouge.

Dans cet exercice on peut procéder de deux manières différentes : soit en considérant que les tirages sont simultanés (c'est ce choix qui a été fait pour la correction), soit en considérant que les tirages sont successifs et sans remise. Les deux méthodes donnent le même résultat.

Lorsqu'on tire 3 jetons parmi 9, il y a $\binom{9}{3} = 84$ possibilités. Il suffit pour chaque question de déterminer le nombre de cas favorables.

1. *Notons A l'événement " Tirer 3 jetons rouges ".*
   Il y a 4 jetons verts, le nombre de cas favorables est donc $\binom{4}{3} = 4$. On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.
2. *Notons B l'événement " Ne tirer aucun jeton rouge". Cet évènement est le même que "Tirer 3 jetons verts"*
   Il y a 5 jetons rouges, le nombre de cas favorables est donc $\binom{5}{3} = 10$. On a donc $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$.
3. *Notons C l'événement " Tirer au plus 2 jetons rouges". Cet évènement est l'évènement contraire de l'évènement A. On a donc $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$.*
4. *Notons D l'événement "Tirer exactement un jeton rouge". On a $\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{84} = \frac{10}{21}$.*

NB : Notons X le nombre de jetons rouges tirés, alors X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(3, 4, 9)$.

Exercice 3 Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur- réservation afin d'abaisser les coûts. Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 250 places et a vendu 252 réservations. On suppose que la probabilité qu'un client donné se presente à l'embarquement est de $0,98$. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de clients se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(252, 0.98)$

2. Quelle est la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement ?

$$\mathbb{P}(X = 252) = 0,98^{252} \approx 0,006151$$

3. Quelle est la probabilité que la campagnie se trouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places) ?

$$\mathbb{P}(X > 250) = \mathbb{P}(X = 252) + \mathbb{P}(X = 251) = 0,98^{252} + \binom{252}{251} 0,98^{251} \times 0,02 \approx 0,03779$$

Exercice 4 Un photographe animalier souhaite photographier un chat sauvage, pour cela il se rend dans une réserve. Pendant la journée, il se poste dans la forêt là où passe le chat et le soir il dort à l'hôtel de la réserve. On estime que la probabilité d'apparition du chat un jour donné est de $0,1$ et que ses apparitions sont indépendantes. Le photographe partira le jour suivant l'apparition du chat (ex : si le chat apparaît le 3ème jour, le photographe sera resté 3 jours et 3 nuits dans la réserve et partira la 4ème jour). On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre entier de jours où le photographe reste dans la réserve.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0.1)$.
2. Calculer la probabilité de photographier le chat au cours des six premiers jours.
   La probabilité de photographier le chat au cours des 6 premiers jours est donc :

$$\mathbb{P}(X \leq 6) = 1 - (0,9)^6 = 0,4686.$$

3. Le photographe n'habitant pas à côté de l'endroit où passe le chat, chaque soir il dort à l'hôtel. Le prix par nuit de la chambre d'hôtel est de 50 euros la première nuit, puis l'hotelier applique une réduction de 2% à chaque nuit supplémentaire.
   (a) Combien aura-t-il dépensé s'il photographie le chat le 6ème jour ? *S'il photographie le chat le 6ème jour alors il aura payé 6 nuits d'hotel, ce qui revient à*

$$\begin{aligned} FraisTotal &= \sum_{k=0}^{5} 50 \times (0,98)^k \\ &= 50 \times \sum_{k=0}^{5} 0,98^k \\ &= 50 \times \left(\frac{1 - 0,98^6}{1 - 0,98} \right) \\ &\approx 285,4 \text{ €}. \end{aligned}$$

   (b) Quelle est la probabilité qu'il dépense plus de 600 euros en nuits d'hôtel ?
   Si le photographe reste n jours alors le coût total du séjour en chambre d'hôtel s'élèvera à :

$$FraisTotal = \sum_{k=0}^{n-1} 50 \times 0,98^k,$$

le premier jour étant le jour 0*. On cherche donc le plus petit entier* n *tel que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} 50\times 0,98^k &> 600\\ \sum_{k=0}^{n-1} 0,98^k &> 12\\ \left(\frac{1-0,98^n}{1-0,98}\right) &> 12\\ 0,98^n &< 1-12\times(0,02)\end{aligned}$$

En passant au logarithme on trouve alors

$$\begin{aligned}\ln(0,98^n) &< \ln(1-12\times(0,02))\\ n &> \frac{\ln(1-12\times(0,02))}{\ln(0,98)}\approx 13,58.\end{aligned}$$

Ainsi la probabilité qu'il dépense plus de 600 *euros est égale à la probabilité qu'il reste au moins* 14 *jours. C'est à dire :*

$$\mathbb{P}(X>13)=(0,9)^{13}\approx 0,2542.$$

4. Pour faire un album, le photographe préfère maintenant réaliser des clichés sur plusieurs jours. Il décide alors de rester dans la réserve jusqu'au 4ème jour où le chat apparaît. Quelle est la probabilité qu'il reste 20 jours dans la réserve ?
Attention ici les conditions de départ du photographe ont changé, la v.a X *ne suit plus une loi géométrique,* X *suit la loi binomial négative* $\mathcal{BN}(4,0.1)$*. On a alors :*

$$\mathbb{P}(X=20)=\binom{19}{3}(0.1)^4(0.9)^{16}\approx 0,018$$

Exercice 5 : On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de cholestérol anormalement élevé. Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo. Ensuite on mesure la baisse du cholestérol.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux de cholestérol avec une probabilité de $0,9$. En revanche on ne constate aucune baisse de ce taux pour 80% des individus ayant pris le placebo.
Dans la suite on note M l'évènement "avoir pris le médicament" et B "avoir une baisse de cholestérol".

1. Calculer $\mathbb{P}(\overline{B})$.
D'après les données de l'énoncé, on a $\mathbb{P}(M)=0.6$ *et* $\mathbb{P}_M(\overline{B})=0.1$*, on en déduit donc :*

$$\mathbb{P}(\overline{B}\cap M)=\mathbb{P}(M)\times\mathbb{P}_M(\overline{B})=0.06.$$

De l'énoncé on peut aussi déduire les probabilités $\mathbb{P}(\overline{M})=0.4$ *et* $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{B})=0.8$*, on a donc :*

$$\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{M})=\mathbb{P}(\overline{M})\times\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{B})=0.32.$$

On en déduit donc que $\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(\overline{B}\cap M)+\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{M})=0.38.$

2. On mesure le taux de cholestérol d'un individu pris au hasrd. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de cholestérol ?
On cherche la probabilité $p_{\bar{B}}(M)$*. On a :*

$$\mathbb{P}_{\overline{B}}(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{\mathbb{P}_M(\overline{B}) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{6}{38} = \frac{3}{19} \approx 0,1579.$$