Lycée Antoine de Saint Exupéry
Terminale 4 SES

Année 2005-2006
24 octobre

Téléchargement de cette feuille sur http://mapage.noos.fr/preparare

Corrigé du devoir maison 2 de mathématiques

Exercice 1 Raccordement par dérivée. (6 points)

a) Les deux conditions $f(0) = 0$ et $f(4) = 1$ signifient que la courbe cherchée doit passer par les points O et A. Les deux conditions $f'(0) = f'(4) = 0$ signifient que les tangentes aux points O et A sont horizontales ce qui garantit un raccordement "non brutal".

b) Non ! En effet, on demande que la courbe a deux points avec tangente horizontale. Or une droite "non-horizontale" ne possède pas de point de tangente horizontale. Et une parabole ne possède qu'un seul point de tangente horizontale – le sommet.

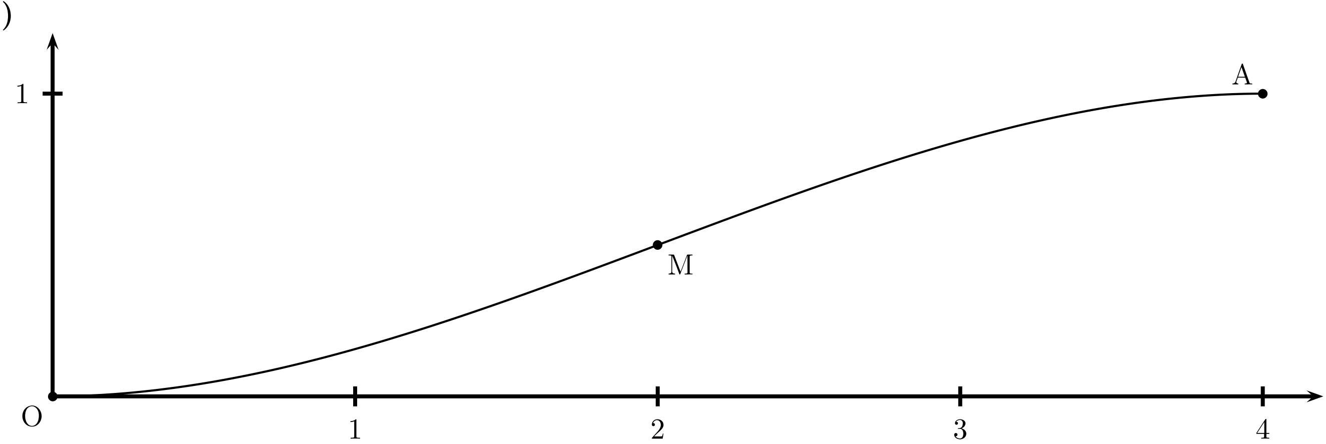
c) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Les quatre propriétés exigées de f se traduisent alors en

$$\left\{\begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ 64a + 16b + 4c + d &=& 1 \\ 48a + 8b + c &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ c &=& 0 \\ 4a + b &=& 1/16 \\ 6a + b &=& 0 \end{array}\right.$$

En retranchant la troisième de la quatrième équation on trouve $2a = -1/16$ ou encore $a = -1/32$. Enfin on obtient $b = -6a = 3/16$. On trouve ainsi

$$f(x) = -\frac{x^3}{32} + \frac{3x^2}{16}.$$

d)



e) La pente est donnée par la fonction dérivée $g(x) = f'(x) = -\frac{3x^2}{32} + \frac{3x}{8}$. Sa courbe est une "parabole tournée vers le bas", donc possède un unique maximum, qui se trouve au sommet de la parabole. L'abscisse du sommet est 2. Donc M a pour coordonnées $(2; f(2)) = (2; 1/2)$.
La pente est $f'(2) = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$. Une équation de la tangente en M est $y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$.

f) (Question facultative) On a

$$h(x) = x - x^3, \qquad h'(x) = 1 - 3x^2.$$

- Les tangentes au minimum et au maximum sont horizontales.

- Les deux racines de $h'(x)$ sont $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}58$. On calcule

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}38\,.$$

Ainsi $\mathrm{A}'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

De même on trouve $\mathrm{O}'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

- On procède deux étapes succéssives.

1) Le minimum est en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. On translate la courbe pour placer le minimum en $(0;0)$.
Pour cela il faut ajouter à la variable le nombre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et retrancher à la fonction la valeur $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

$$h_1(x) = h\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

2) Le maximum est maintenant en

$$(\alpha;\beta) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,;\,\frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \approx (1{,}15;0{,}77).$$

Mais on veut qu'il soit en

$$(\alpha';\beta') = (4;1).$$

Il faut donc "retrécir" la courbe horizontalement et la "rallonger" verticalement. Pour cela il on multiplie la variable par $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et on multiplie la fonction h_1 par $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$$h_2(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} h_1\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\,.$$

Vérifions que ce procédé aboutit au même résultat, c'est-à-dire que $h_2 = f$:

$$h_2(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} h_1\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left[h\left(\frac{x}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} h\left(\frac{x-2}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x-2}{2\sqrt{3}} - \left(\frac{x-2}{2\sqrt{3}}\right)^3\right] + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8}(x-2) - \frac{1}{32}(x-2)^3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{32}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2 = f(x)\,.$$

Exercice 2 Coût marginal. (3 points)

a) Les coûts fixes sont de 180 €.

b) Produire davantage peut "rentabiliser" une usine. Mais à partir d'un certain nombre d'objets fabriqués, ça redevient plus cher car on dépasse les capacités de production.
Par exemple : cuisiner pour six personnes est plus "rentable" que cuisiner pour deux, et cuisiner pour dix personnes est encore plus rentable. Mais cuisiner pour trente personnes devient moins rentable car votre cuisine n'est pas assez équipée – vous devriez louer du matériel, du personnel, etc.

c) D'après le graphique on dirait que $M(300) < M(200) < M(450)$. En effet la “courbure” est plus forte en 450 et moins forte en 300 – autrement dit, la courbe semble “vouloir augmenter plus vite” en 450.)

d) Le coût marginal est-il croissant sur $[300; 450]$ et décroissant sur $[200; 300]$.

e) Le nombre dérivée $C'(q)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction C au point $P(q,C(q))$.
Cette tangente est très proche de la droite passant par les points $P(q,C(q))$ et $P'(q+1,C(q+1))$. Donc $C'(q)$ est très proche du coefficient directeur de (PP'). Or ce coefficient directeur vaut

$$\frac{C(q+1)-C(q)}{(q+1)-q} = \frac{C(q+1)-C(q)}{1} = M(q)\,.$$

Cela explique pourquoi $C'(q) \approx M(q)$.

f) Avec la calculatrice on obtient

$$\begin{array}{llcl} C(200) = 180 & C(201) = 180{,}39701 & \Longrightarrow & M(200) = 0{,}39701 \\ C(300) = 200 & C(301) = 180{,}10001 & \Longrightarrow & M(300) = 0{,}10001 \\ C(450) = 248{,}75 & C(451) = 249{,}52951 & \Longrightarrow & M(450) = 0{,}77951 \end{array}$$

D'autre part

$$C'(q) = 0{,}00003x^2 - 0{,}018x + 2{,}8 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} C'(200) = 0{,}4 \\ C'(300) = 0{,}1 \\ C'(450) = 0{,}775\,. \end{array}$$

Cela confirme la réponse à la question e) c'est-à-dire $M(q) \approx C'(q)$.
Cela confirme la réponse à la question c) c'est-à-dire $M(300) < M(200) < M(450)$.

Exercice 3 Coût unitaire moyen. (2 points)

a) $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{q^3 - 40q^2 + 550q}{100q} = \dfrac{q^2 - 40q + 550}{100}$.

b) La courbe de $C_m(q)$ est une parabole “tournée vers la haut”. L'abscisse de son minimum est 20.

c) On a

$$C'(q) = \frac{1}{100}(3q^2 - 80q + 550)\,.$$

La courbe de C' est une parabole tournée vers le haut. Ainsi le nombre q tel que le coût marginal $C'(q)$ est minimal est l'abscisse du sommet de la parabole. On trouve $q = \frac{40}{3} \approx 13$ (formule $-\frac{b}{2a}$).
On constate que la quantité minimisant le coût marginal ne coïncide pas avec celle qui minimise le coût unitaire moyen.

Exercice 4 Asymptotes horizontales ou verticales. (6 points)

a) **Domaine de définition.** Les valeurs interdites sont les racines du dénominateur. On trouve

$$f(x) = \frac{2+x}{-2x^2+2x+4} = \frac{2+x}{2(2-x)(x+1)}\,, \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}\,.$$

Limites. Comme le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Pour les limites latérales en 2 et -1 on trouve,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \nearrow 2} f(x) &= \lim_{x \nearrow 2} \frac{2+x}{2(2-x)(x+1)} = \frac{4}{2 \times 0^{+} \times 3} = +\infty \ , \\
\lim_{x \searrow 2} f(x) &= \lim_{x \searrow 2} \frac{2+x}{2(2-x)(x+1)} = \frac{4}{2 \times 0^{-} \times 3} = -\infty \ , \\
\lim_{x \nearrow -1} f(x) &= \lim_{x \nearrow -1} \frac{2+x}{2(2-x)(x+1)} = \frac{1}{2 \times 3 \times 0^{-}} = -\infty \ , \\
\lim_{x \searrow -1} f(x) &= \lim_{x \searrow -1} \frac{2+x}{2(2-x)(x+1)} = \frac{1}{2 \times 3 \times 0^{+}} = +\infty \ .
\end{aligned}$$

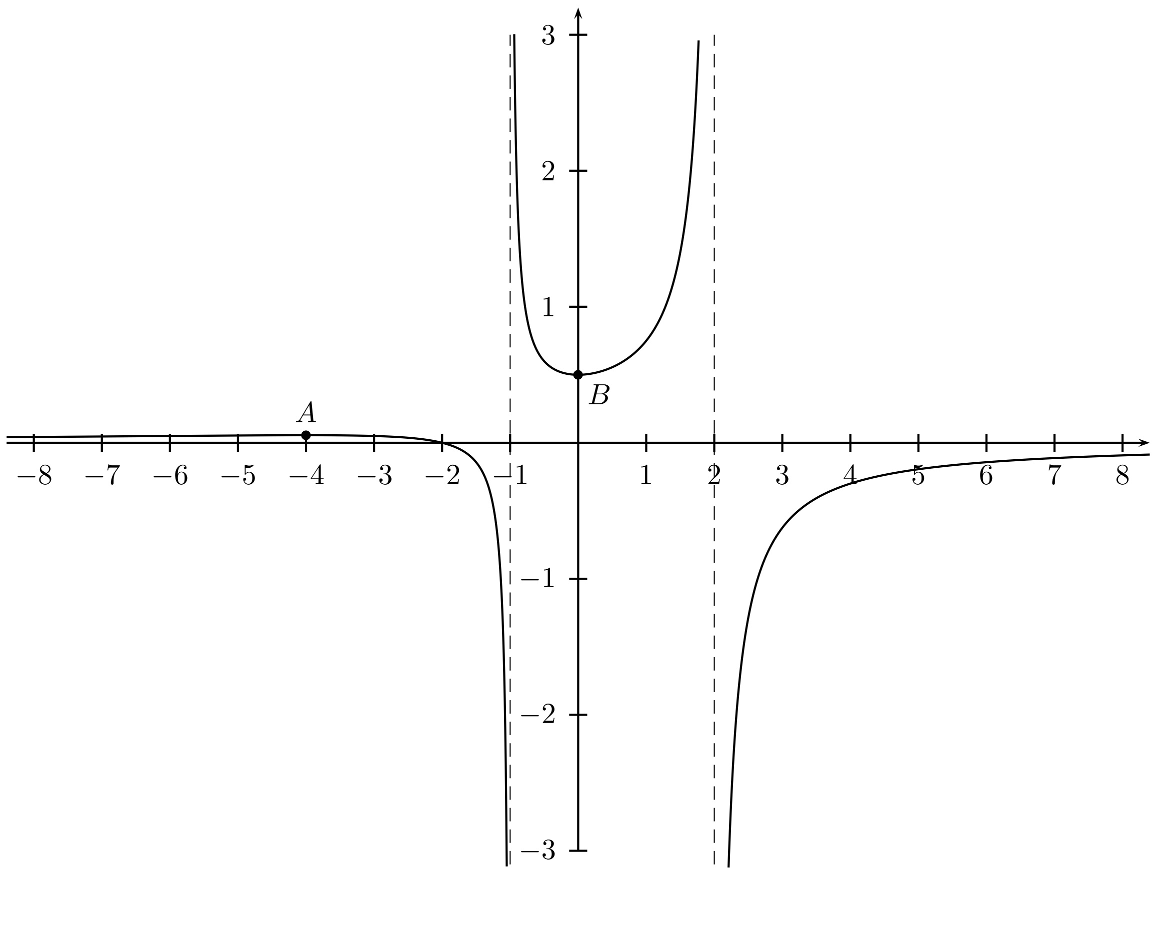
Asymptotes. Il y a deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -1$ et $x = 2$. Il y a une asymptote horizontale, à savoir l'axe des abscisses.
Variation. On dérive la fonction f :

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x+4-(2+x)(-4x+2)}{(2(2-x)(x+1))^2} = \frac{-x^2+x+2-(-2x^2-3x+2)}{2(2-x)^2(x+1)^2} = \frac{x^2+4x}{2(x-2)^2(x+1)^2} \ .$$

Le dénominateur de f' est toujours positif. Le signe de $f'(x)$ coïncide donc avec celui du numérateur $x^2+4x = x(x+4)$ dont les racines sont -4 et 0.

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
var. f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{18}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

Il y a un maximum au point $A(-4; \frac{1}{18})$ et un minimum au point $B(0; \frac{1}{2})$.



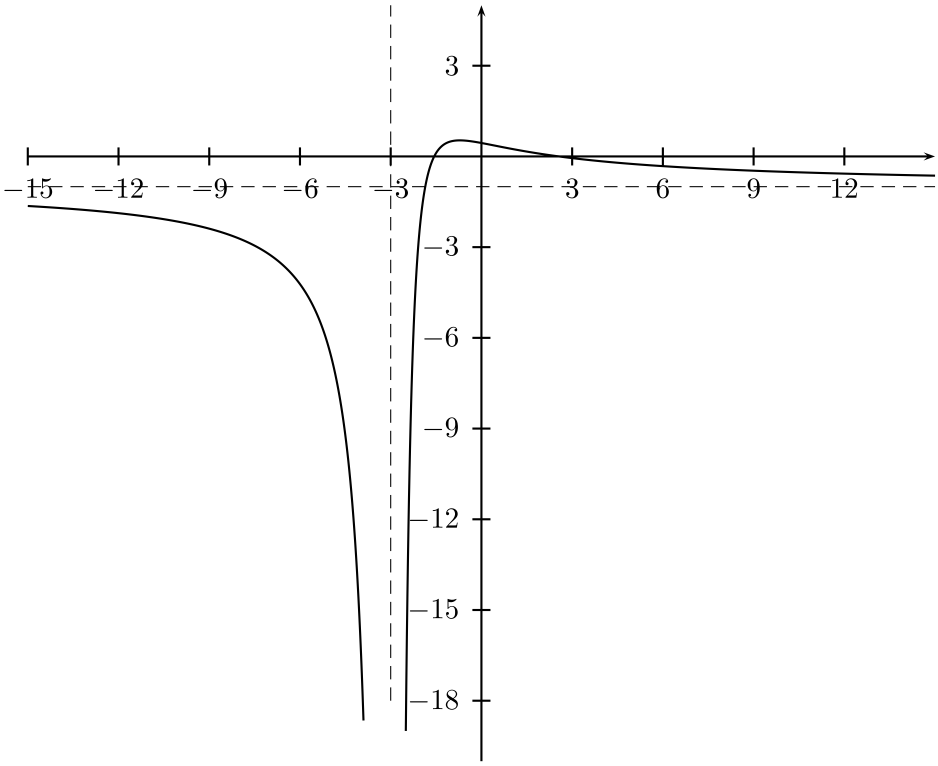
b) On trouve

$$g(x) = \frac{4+x-x^2}{x^2+6x+9} = \frac{4+x-x^2}{(x+3)^2}\,, \qquad D_g = \mathbb{R}\backslash\{-3\}\,.$$

Les limites sont

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+x-x^2}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} -1 = -1\,,\\
\lim_{x\nearrow -3} g(x) &= \lim_{x\nearrow -3} \frac{4+x-x^2}{(x+3)^2} = \frac{-8}{(0^-)^2} = -\infty\,,\\
\lim_{x\searrow -3} g(x) &= \lim_{x\searrow -3} \frac{4+x-x^2}{(x+3)^2} = \frac{-8}{(0^+)^2} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Il y a donc une asymptote horizontale, d'équation $y=-1$, et une asymptote verticale, d'équation $x=-3$.



Exercice 5 Asymptotes obliques. (3 points)

a) Le dénominateur ne s'annulle jamais, donc $D_f = \mathbb{R}$ et il n'y a pas d'asymptote verticale. Il n'y a pas d'asymptote horizontale car les limites à l'infini ne sont pas des nombres réels :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-x+6}{2(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

b) On doit avoir pour tout x

$$\begin{aligned}
& \frac{x^3+2x^2-x+6}{2(x^2+1)} = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}\\
\iff \quad & x^3+2x^2-x+6 = 2(x^2+1)(ax+b)+2(cx+d)\\
\iff \quad & x^3+2x^2-x+6 = 2ax^3+2bx^2+2(a+c)x+2(b+d)
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 1 \\ 2b &=& 2 \\ 2(a+c) &=& -1 \\ 2(b+d) &=& 6 \end{array}\right.$$

Ainsi $(a,b,c,d) = (\frac{1}{2}, -1, -1, 2)$ et

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-x+6}{2(x^2+1)} = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{x}{2}+1+\frac{2-x}{x^2+1} = \frac{x}{2}+1+\varepsilon(x)\ ,$$

où $\varepsilon(x) = \frac{2-x}{x^2+1}$ est une fonction de limite nulle lorsque $x \to \pm\infty$. Donc $\mathcal{C}_f$ possède une droite asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

c) Le signe de $\varepsilon(x)$ pour $x > 2$ est négatif. Donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote lorsque $x \to +\infty$. Le signe de $\varepsilon(x)$ pour $x < 2$ est positif. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote lorsque $x \to -\infty$.

d)