Nombres premiers, PGCD et PPCM

www.MathOMan.com

Nombres premiers

Définition 1 *Un nombre entier plus grand que* 1 *est appelé* nombre premier *si on ne peut pas l'écrire comme produit de deux nombres entiers plus grands que* 1*.*

11, par exemple, est un nombre premier.
En revanche, 12 n'est pas un nombre premier car $12 = 2 \times 6$.

Une définition équivalente est la suivante.

Définition 2 *Un nombre entier plus grand que* 1 *est appelé* nombre premier *s'il est divisible seulement par lui-même et par* 1*.*

On peut prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers — nous n'allons pas le faire, nous nous contentons de connaître les "petits" nombres premiers, ceux qui sont inférieurs à 100 :

Exercice. Les premiers quatre nombres premiers sont $2, 3, 5$ et 7. Quels sont les prochains cinq nombres premiers ? (Répondre sans calculatrice !)

Théorème 1 *(Décomposition en facteurs premiers.) Tout entier plus grand que* 1 *possède une factorisation unique en produits de nombres premiers.*

Nous n'allons pas démontrer ce résultat. Intuitivement il est assez évident, car on décompose en produits jusqu'à ce qu'on ne peut plus décomposer.

Exemples.

- $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$. Je ne peux pas décomposer davantage, donc la décomposition de 12 en facteurs premiers est $2 \times 2 \times 3$.
- 13 est déjà décomposé car c'est un nombre premier.
- $14 = 2 \times 7$.
- $15 = 3 \times 5$.
- $16 = 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$.
- 17 est déjà décomposé car c'est un nombre premier.
- $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$.
- 19 est déjà décomposé car c'est un nombre premier.
- $20 = 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 5$.

Exercice. Poursuivre la liste ci-dessus en décomposant tous les entiers jusqu'à 100.

Remarque. Le théorème parle de “factorisation unique”. Or, les facteurs d'un produit pouvant être permutés, on peut décomposer 20 de plusieurs manières, $2 \times 2 \times 5$ ou $2 \times 5 \times 2$ ou $5 \times 2 \times 2$. Nous convenons alors d'ordonner les facteurs en ordre croissant. Ainsi nous ne gardons que la factorisation $2 \times 2 \times 5$ — c'est en ce sens que la factorisation est unique.

Application et astuce. Dans quelques cas, la décomposition peut accéler le calcul mental d'un produit. Par exemple, pour calculer 14×35 je fais (dans ma tête)

$$14 \times 35 = (2 \times 7) \times (5 \times 7) = (2 \times 5) \times (7 \times 7) = 10 \times 49 = 490\,.$$

On cherche toujours à regrouper les facteurs 2 et 5 car leur produit est 10.

PGCD et PPCM

La décomposition en nombres premiers donne une méthode simple et systématique de trouver le **plus petit commun multiple** (PPCM) et le **plus grand commun diviseur** (PGCD) de deux nombres.

Théorème 2 *Soient m et n deux entiers positifs. Alors*

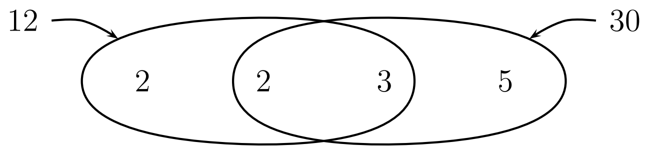
- *le* $\mathrm{PGCD}(m,n)$ *est égal au produit de tous les facteurs premiers qui sont dans la décomposition de m <u>et</u> dans la décomposition de n.*
- *le* $\mathrm{PPCM}(m,n)$ *est égal au produit de tous les facteurs premiers qui sont dans la décomposition de m <u>ou</u> dans la décomposition de n.*

Encore, ça devient plus clair avec un

Exemple.
Prenons $m = 12$ et $n = 30$. On décompose en nombre premiers,

$$\begin{array}{rcccccccc} 12 & = & 2 & \times & 2 & \times & 3 & & \\ 30 & = & & & 2 & \times & 3 & \times & 5 \end{array}$$

On peut représenter la situation graphiquement.



Le PGCD(12,30) est le produit des facteurs qui sont simultanément dans les deux décompositions. Donc

$$\mathrm{PGCD}(12{,}30) = 2 \times 3 = 6.$$

Deux choses sont alors évidentes. Premièrement 2×3 divise 12 <u>et</u> 30 — c'est donc bien un diviseur commun. Deuxièmement, on ne peut pas trouver plus grand car en rajoutant encore un facteur 2 (ou 5) on ne diviserait plus 30 (ou 12). Il s'agit donc bien du *plus grand* commun diviseur.[1]

Le PPCM(12,30) est le produit des facteurs qui sont dans la décomposition de 12 ou dans la décomposition de 30. Donc

$$\text{PPCM}(12{,}30) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60.$$

Deux choses sont alors évidentes. Premièrement $2 \times 2 \times 3 \times 5$ est un multiple de 12 et de 30 — c'est donc bien un multiple commun. Deuxièment, on ne peut pas trouver plus petit car en enlevant un facteur on n'aurait plus de multiple de 12 ou de 30. Il s'agit donc bien du *plus petit* commun multiple.

Exercice. Pour chaque couple de nombres trouver le PGCD et le PPCM.

- 15 et 12.
- 8 et 18.
- 50 et 32.
- 21 et 33.
- 84 et 30.

Application au calcul des fractions

Le plus petit dénominateur commun de deux fractions est le PPCM des dénominateurs. Il ne faut surtout pas utiliser une autre dénominateur commun, ça donne des nombres inutilement grands ! Par exemple, il est très maladroit de calculer comme ça :

$$\frac{3}{14} + \frac{3}{35} = \frac{3 \times 35}{14 \times 35} + \frac{3 \times 14}{35 \times 14} = \frac{105}{490} + \frac{42}{490} = \frac{147}{490} \qquad \text{MAUVAIS !!!}$$

C'est correct mais mauvais parce que les grands nombres sont, en général, plus difficiles à manipuler ; par exemple, on ne voit plus immédiatement si on peut simplifier le résultat. En fait, on peut mais ça ne saute pas aux yeux :

$$\frac{147}{490} = \frac{3 \times 49}{10 \times 49} = \frac{3}{10}.$$

Pour garder les nombres petits dès le départ, vaut mieux décomposer les deux dénominateurs puis prendre le *plus petit* dénominateur commun :

$$\frac{3}{14} + \frac{3}{35} = \frac{3}{2 \times 7} + \frac{3}{5 \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 7} + \frac{2 \times 3}{2 \times 5 \times 7} \qquad \text{MIEUX !!!}$$

$$= \frac{15}{2 \times 5 \times 7} + \frac{6}{2 \times 5 \times 7} = \frac{21}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}.$$

On remarquera que je ne calcule pas $2 \times 5 \times 7 = 70$, je préfère garder le dénominateur commun en forme de produit jusqu'à la fin — comme ça je vois plus facilement si on peut simplifier après avoir fait la somme.

Exercice. Calculer avec cette méthode

$$\frac{4}{15} + \frac{5}{24}, \quad \frac{3}{12} - \frac{7}{10}, \quad \frac{1}{44} + \frac{1}{77}, \quad \frac{40}{27} + \frac{5}{21} \quad \text{et} \quad \frac{1}{14} + \frac{2}{21} + \frac{1}{6}.$$

1. Pour les véritables matheux ce raisonnement n'est pas complet, mais pour nous ça suffit.